



## Preparação para o ENQ Recorrências

Prof. Paulo Rodrigues  
www.cadernosdematematica.com.br

17 de outubro de 2020

(1) Sejam  $a$  e  $b$  as raízes da equação  $x^2 = x + 1$ . Mostre que  $a^{13} + b^{13}$  é um inteiro e determine seu valor

(2) Prove que se  $a$  e  $b$  são as raízes da equação  $x^2 - Sx + P = 0$ , e  $x_n = a^n + b^n$ , então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

para todo inteiro positivo  $n$ .

(3) Prove que se  $a$  e  $b$  são as raízes da equação  $x^2 - Sx + P = 0$ , e  $x_n = \alpha a^n + \beta b^n$ , então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

para todo inteiro positivo  $n$ .

(4) Calcule  $ax^5 + by^5$  se os números reais  $a$ ,  $b$ ,  $x$ , e  $y$  satisfazem as equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

(5) Prove que, para todo inteiro positivo  $n$ , o número  $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$  é ímpar.  
 $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro  $\leq x$

(6) Neste exercício vamos resolver a recorrência

$$a_n = pa_{n-1} + q,$$

sabendo que  $a_0 = r$ , sendo  $p$ ,  $q$ ,  $r$  constantes.

(a) Determine uma fórmula para  $a_n$  em função de  $q$  e  $r$  se  $p = 1$ . Como chamamos uma sequência deste tipo?

(b) Defina a sequência  $b_n = a_n + c$ , sendo  $c$  uma constante. Escolha  $c$  em função de  $q$  e  $p$ , de modo que a função  $b_n$  seja uma Progressão Geométrica de razão  $p$ . Para quais valores de  $p$  é possível escolher  $c$  nestas condições? Determine  $b_n$  em função de  $r$ ,  $p$ ,  $q$  e  $n$ .

(c) Mostre que, para  $p \neq 1$ , o termo geral de tal sequência é dado pela fórmula

$$a_n = \left( r + \frac{q}{p-1} \right) p^n - \frac{q}{p-1}.$$