



Preparação para o ENQ Recorrências

Prof. Paulo Rodrigues
www.cadernosdematematica.com.br

17 de outubro de 2020

(1) Sejam a e b as raízes da equação $x^2 = x + 1$. Mostre que $a^{13} + b^{13}$ é um inteiro e determine seu valor

(2) Prove que se a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, e $x_n = a^n + b^n$, então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

para todo inteiro positivo n .

(3) Prove que se a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, e $x_n = \alpha a^n + \beta b^n$, então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

para todo inteiro positivo n .

(4) Calcule $ax^5 + by^5$ se os números reais a , b , x , e y satisfazem as equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

(5) Prove que, para todo inteiro positivo n , o número $[(2 + \sqrt{3})^n]$ é ímpar.
 $[x]$ é o maior inteiro $\leq x$

(6) Neste exercício vamos resolver a recorrência

$$a_n = pa_{n-1} + q,$$

sabendo que $a_0 = r$, sendo p , q , r constantes.

(a) Determine uma fórmula para a_n em função de q e r se $p = 1$. Como chamamos uma sequência deste tipo?

(b) Defina a sequência $b_n = a_n + c$, sendo c uma constante. Escolha c em função de q e p , de modo que a função b_n seja uma Progressão Geométrica de razão p . Para quais valores de p é possível escolher c nestas condições? Determine b_n em função de r , p , q e n .

(c) Mostre que, para $p \neq 1$, o termo geral de tal sequência é dado pela fórmula

$$a_n = \left(r + \frac{q}{p-1} \right) p^n - \frac{q}{p-1}.$$