Preparação para o ENQ
Recorrências

Prof. Paulo Rodrigues
www.cadernosdematematica.com.br

"Agora terei menos distracções."
Frase do grande matemático Leonhard Euler após perder a visão do olho direito

Raízes da Equação do Segundo Grau

(1) Sejam a e b as raízes da equação $x^2 = x + 1$. Mostre que $a^{13} + b^{13}$ é um inteiro e determine seu valor

Fatos e Ideias que Ajudam:

Resolução:

Fato Importante 1

(2) Prove que se a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, e $x_n = a^n + b^n$, então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

para todo inteiro positivo n.

Fatos e Ideias que Ajudam:

Resolução:

Fato Importante 2

(3) Prove que se a e b são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$, e $x_n = \alpha a^n + \beta b^n$, então

$$x_{n+2} = Sx_{n+1} - Px_n,$$

para todo inteiro positivo n.

Fatos e Ideias que Ajudam:

Resolução:

Recorrência

(4) Calcule $ax^5 + by^5$ se os números reais a, b, x, e y satisfazem as equações

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

Fatos e Ideias que Ajudam:

Resolução:

Problema Olímpico

(5) Prove que, para todo inteiro positivo n, o número $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ é ímpar.
$\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro $\leqslant x$

Fatos e Ideias que Ajudam:

Resolução:

---

(6) Neste exercício vamos resolver a recorrência

$$a_n = pa_{n-1} + q,$$

sabendo que $a_0 = r$, sendo p, q, r constantes.

(a) Determine uma fórmula para a_n em função de q e r se $p = 1$. Como chamamos uma sequência deste tipo?

(b) Defina a sequência $b_n = a_n + c$, sendo c uma constante. Escolha c em função de q e p, de modo que a função b_n seja uma Progressão Geométrica de razão p. Para quais valores de p é possível escolher c nestas condições? Determine b_n em função de r, p, q e n.

(c) Mostre que, para $p \neq 1$, o termo geral de tal sequência é dado pela fórmula

$$a_n = \left(r + \frac{q}{p-1}\right)p^n - \frac{q}{p-1}.$$

Fatos e Ideias que Ajudam:

Resolução:

Prof. Paulo Rodrigues – www.cadernosdematematica.com.br