

# Mini-curso Aberto ENQ

## Lista 01

Prof. Paulo Rodrigues  
[www.cadernosdematematica.com.br](http://www.cadernosdematematica.com.br)

*“Os padrões do matemático, como o pintor ou o poeta, devem ser belos; as ideias, como as cores ou as palavras, devem se encaixar harmoniosamente. A beleza é o primeiro teste: não há lugar permanente neste mundo para a matemática feia.”*

*G. H. Hardy*

 (MCAENQ – 1)

(a) Simplifique a expressão

$$x^2 - (x + 1)^2 - (x + 2)^2 + (x + 3)^2.$$

(b) Prove, por indução, que todo inteiro positivo  $n$  pode ser escrito na forma

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 + \dots \pm k^2,$$

para algum inteiro positivo  $k$  e alguma escolha de sinais  $+$  e  $-$ .

**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---

 (MCAENQ – 2)

- (a) Qual o número de soluções inteiras e não-negativas  $(x, y, z)$  da equação  $x + y + z = 12$ ?
- (b) Um artesão precisa colocar capas em 12 livros idênticos usando capas de cores vermelha, verde ou azul. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---

 (MCAENQ - 3)

(a) Seja  $n$  um inteiro positivo e  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  números reais. A soma

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2 = \sum_{i=1}^n (a_ix + b_i)^2.$$

é uma função quadrática em  $x$ . Explique porque o discriminante de  $f$  é sempre menor do que ou igual a zero.

(b) Utilize o item anterior para provar a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*:

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Quando ocorre a igualdade?

**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---

☀ (MCAENQ – 4) Sejam  $a$  e  $b$  as raízes da equação  $x^2 - 6x + 1 = 0$  e para cada inteiro positivo  $n$ , defina  $x_n = a^n + b^n$ .

(a) Mostre que  $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$ .


(b) Prove que, para todo inteiro positivo  $n$ ,  $x_n$  é um inteiro não divisível por 5.

**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---

 (MCAENQ – 5) São dados dois pontos fixos  $A$  e  $B$  e um ponto móvel  $M$  sobre uma circunferência  $\mathcal{C}$ . No prolongamento do segmento de reta  $AM$  marcamos o ponto  $N$  de modo que  $MN = MB$ . Determine o lugar geométrico de  $N$  quando  $M$  percorre  $\mathcal{C}$ .

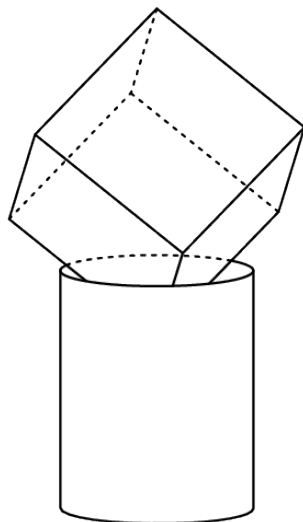
**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---

☀ (MCAENQ – 6) Um barril cilíndrico com raio 4 metros e altura 10 metros está cheio de água. Um cubo sólido aresta 8 metros é colocado no barril de forma que a diagonal do cubo seja vertical. O volume de água assim deslocado é de  $v$  metros cúbicos. Determine  $v^2$ .




**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---

 (MCAENQ – 7) Prove que

(a)  $19^{19} + 69^{69}$  é divisível por 44.

(b)  $2^{70} + 3^{70}$  é divisível por 13.


**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---



 (MCAENQ – 8) Seja  $p$  um número primo da forma  $4k + 3$ . Mostre que se  $p|(a^2 + b^2)$ , então  $p|a$  e  $p|b$ .  
utilize o Pequeno Teorema de Fermat.

**Sugestão:**

**Fatos e Ideias que Ajudam:**

---

**Resolução:**

---