Preparação para o ENA 2022
Lista 2
Soluções

www.cadernodematematica.com.br

23 de maio de 2021

(1) A proporção de w para x é $4:3$, a proporção de y para z é $3:2$ e a proporção de z para x é $1:6$. Qual é a proporção de w para y?

(a) $4:3$ **(b)** $3:2$ **(c)** $8:3$ **(d)** $4:1$ **(e)** $16:3$

E

Sugestões e Fatos que Ajudam: Escreva as razões associadas as proporções de maneira adequada e multiplique-as para obter o resultado desejado.

Solução: Podemos escrever as proporções como

$$\frac{w}{x} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{z}{y} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{x}{z} = \frac{6}{1}.$$

Multiplicando estas três igualdades obtemos

$$\frac{w}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{z}}{y} \cdot \frac{\cancel{x}}{\cancel{z}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1},$$

donde obtemos

$$\frac{w}{y} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 6}{3 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{16}{3}.$$

(2) Há 10 pessoas em pé igualmente espaçadas em torno de um círculo. Cada pessoa conhece exatamente 3 das outras 9 pessoas: as 2 pessoas que estão ao lado dela, bem como a pessoa diametralmente oposta no outro lado do círculo. Quantas maneiras existem para as 10 pessoas se dividirem em 5 pares de modo que os membros de cada par se conheçam?

(a) 11 **(b)** 12 **(c)** 13 **(d)** 14 **(e)** 15

C

Sugestões e Fatos que Ajudam: Conte os casos organizando pelo número de pares "diâmetros".

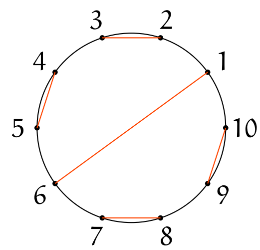
Solução: Considere as 10 pessoas em um círculo, onde duas pessoas opostas formam o diâmetro do círculo.

Vamos dividir em casos de acordo com o número de diâmetros utilizados no círculo.

- Caso 1: 0 diâmetros.

  Existem 2 maneiras: $(1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10)$ e $(2-3, 4-5, 6-7, 8-9, 10-1)$.

- Caso 2: 1 diâmetro.

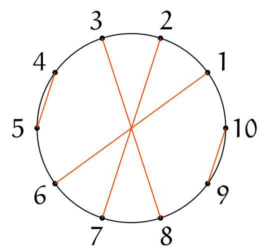
  

  Quando definimos um par como diâmetro, todos os outros pares ficam determinados.

  Como podemos desenhar 5 diâmetros diferentes, temos 5 possibilidades.

- Observe que não pode haver exatamente 2 diâmetros, pois haveria uma pessoa de cada lado que não teria um par adjacente a eles. O único cenário forçado é quando as duas pessoas de cada lado seriam emparelhadas em um diâmetro. Assim, temos uma contradição.

- Caso 3: 3 diâmetros.

  Existem 5 modos de diâmetros possíveis para desenhar. Quando traçamos os três diâmetros os outros pares ficam determinados. Observe que os três diâmetros traçados devem ser "consecutivos".

- Observe que não pode haver um caso com 4 diâmetros porque então teria que haver 5 diâmetros para as duas pessoas restantes, já que elas deveriam ser conectadas com um diâmetro. Surge uma contradição.

- Caso 4: 5 diâmetros

  Só há 1 maneira de fazer isso.

Assim, no total, existem $2 + 5 + 5 + 1 = 13$ maneiras possíveis.

(3) O número real x satisfaz a equação $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$. Qual é o valor de $x^{11} - 7x^7 + x^3$?

(a) -1 **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** 2 **(e)** $\sqrt{5}$

B

Sugestões e Fatos que Ajudam: Calcule $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

Solução: Elevando a expressão dada ao quadrado, obtemos

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5,$$

donde obtemos

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5,$$

e

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3.$$

Repetindo este procedimento obtemos

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 &= 3^2, \\ x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} &= 9 \\ x^4 + \frac{1}{x^4} &= 7 \\ \frac{x^8 + 1}{x^4} &= 7 \\ x^8 - 7x^4 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Observando a expressão a ser calculada no problema, temos

$$x^{11} - 7x^7 + x^3 = x^3(x^8 - 7x^4 + 1) = x^3 \cdot 0 = 0.$$

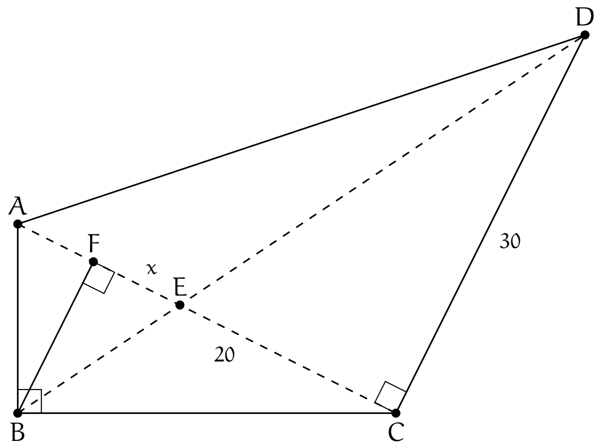
(4) O quadrilátero $ABCD$ satisfaz $\angle ABC = \angle ACD = 90°$, $AC = 20$ e $CD = 30$. As diagonais AC e BD intersectam-se no ponto E, e $AE = 5$. Qual é a área do quadrilátero $ABCD$?

(a) 330 **(b)** 340 **(c)** 350 **(d)** 360 **(e)** 370

D

Sugestões e Fatos que Ajudam: Calcule inicialmente a área do triângulo ACD. Para calcular a área do triângulo ABC, trace a altura BF. Utilize a semelhança dos triângulos BEF e DEC. Utilize ainda a relação métrica $h^2 = mn$.

Solução:



Vamos denotar a área do polígono $\mathcal{X}$ por $[\mathcal{X}]$.

É crucial desenhar um bom diagrama para este problema. Como $AC = 20$ e $CD = 30$, obtemos $[ACD] = 300$. Agora precisamos encontrar $[ABC]$ para obter a área de todo o quadrilátero. Trace a altura de B relativa a AC e chame o ponto de interseção de F. Seja $FE = x$. Como $AE = 5$, então $AF = 5 - x$. Os triângulos, BFE e DCE são semelhantes. Como EC é $20 - 5 = 15$ e $DC = 30$, obtemos

$$\frac{BF}{CD} = \frac{FE}{EC} \Longrightarrow \frac{BF}{30} = \frac{x}{15} \Longrightarrow BF = 2x.$$

Considerando a relação métrica no triângulo ABC, obtemos $BF^2 = AF \cdot FC$, donde obtemos

$$(2x)^2 = (5 - x) \cdot (15 + x),$$

donde obtemos $x^2 + 2x - 15 = 0$. Resolvendo esta equação quadrática obtemos $x = 3$ ou $x = -5$ (não convém). Assim, obtemos $BF = 2x = 6$ e

$$[ABC] = \frac{AC \cdot BF}{2} = \frac{20 \cdot 6}{2} = 60.$$

Portanto, $[ABCD] = [ACD] + [ABC] = 300 + 60 = 360$.

(5) Defina

$$P(x) = (x - 1^2)(x - 2^2) \cdots (x - 100^2).$$

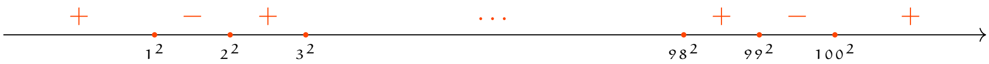
Quantos inteiros n existem tais que $P(n) \leqslant 0$?

(a) 4900 **(b)** 4950 **(c)** 5000 **(d)** 5050 **(e)** 5100

E

Sugestões e Fatos que Ajudam: Observe que os sinais se alternam nos intervalos determinados pelas raízes de P. Qual o sinal de $P(x)$ quando $x > 100^2$? Quantos números existem em cada intervalo determinado pelas raízes?

Solução: Para descobrir para quais valores de n temos $P(n) \leqslant 0$, é suficiente fazer o estudo do sinal de P. É claro que $P(x) > 0$ para $x > 100^2$. O sinal de P muda em cada n tal que $P(n) = 0$ e então podemos obter o sinal em todos os intervalos. Este será positivo entre um quadrado perfeito par e um ímpar e negativo entre um quadrado perfeito ímpar e um par.

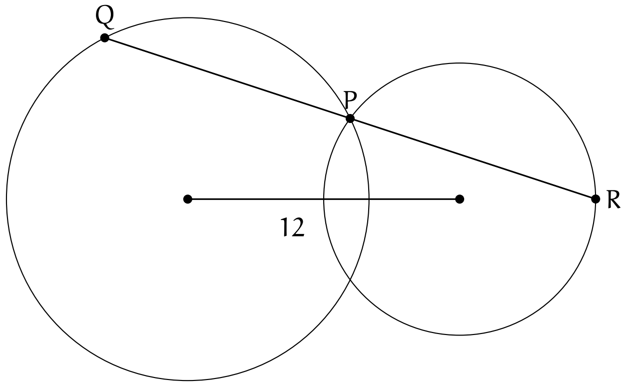


O primeiro intervalo contém $2^2 - 1^2 + 1 = 4$ números, o segundo contém $4^2 - 3^2 + 1 = 8$ números, o terceiro $6^2 - 5^2 + 1 = 12$ números e o quinquagésimo contém $100^2 - 99^2 + 1 = 200$ números. De um modo geral o n-ésimo intervalo procurado contém $(2n)^2 - (2n-1)^2 + 1 = 4n$ números. Estes números formam um Progressão Aritmética de razão 4 com soma igual a

$$4 + 8 + \cdots + 200 = \frac{(4 + 200)50}{2} = 5100.$$

Desafio 2

Na figura, dois círculos com raios 8 cm e 6 cm são desenhados com seus centros separados por 12 cm. Em P, um dos pontos de intersecção, uma reta é traçada de forma que as cordas QP e PR tenham o mesmo comprimento. Encontre o quadrado do comprimento de QP.

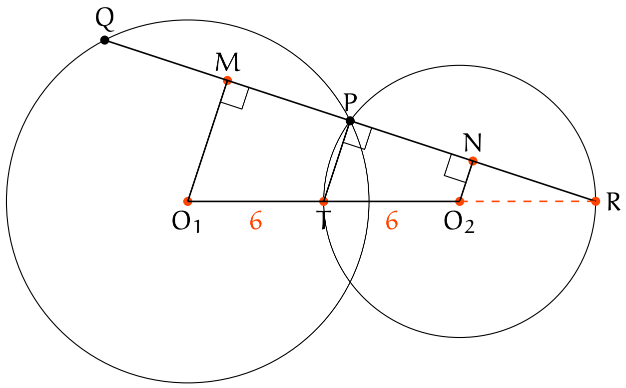


Sugestões e Fatos que Ajudam: Prove que R está sobre a reta que passa pelos centros das duas circunferências.

Solução: Sejam O_1 e O_2 os centros dos dois círculos. Nesta primeira solução vamos mostrar que R está sobre a reta O_1O_2. A partir deste fato vários caminhos são possíveis para conclusão do problema.

Sejam M, N e T os pontos médios de QP, PR e O_1O_2. Como QP e PR são cordas dos dois círculos, é claro que O_1M e O_2N são perpendiculares à reta QR. Como $O_1O_2 = 12$ e o raio do círculo de centro O_2 é igual a 6, o ponto T pertence à circunferência de centro O_2.

Como $QP = PR$, temos $QM = MP = PN = NR = x$, de modo que P é o ponto médio de MN.



Observe ainda que PT é base média do trapézio O_1MNO_2, de modo que $TP \perp MN$. Portanto, como $\angle TPR = 90°$, temos que TR é diâmetro, donde segue R, O_2 e T são colineares.

Sabendo que O_1O_2 contém R, obtemos a semelhança dos triângulos O_1MR e O_2NR

$$\frac{O_1M}{O_2N} = \frac{O_1R}{O_2R} \implies \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{18}{6} \implies O_1M = 3O_2N.$$

Pelo Teorema de Pitágoras nos triângulos O_1MP e O_2NR temos que $O_1M = \sqrt{64 - x^2}$ e $O_2N = \sqrt{36 - x^2}$. Portanto, obtemos que

$$\sqrt{64 - x^2} = 3\sqrt{36 - x^2} \implies 64 - x^2 = 9(36 - x^2) \implies 4x^2 = 130 \implies QP^2 = 130.$$