Preparação para o ENA 2022
Lista 3
Soluções

www.cadernodematematica.com.br

28 de maio de 2021

Respostas

1	2	3	4	5	Desafio
C	B	A	E	B	12

(1) Qual é a soma dos números reais distintos x para os quais $|x^2 - 12x + 34| = 2$?

(a) 12 **(b)** 15 **(c)** 18 **(d)** 21 **(e)** 25

C

Sugestões e Fatos que Ajudam: Considere os dois possíveis valores para $x^2 - 12x + 34$ e resolva as equações.

Solução: Se $|x^2 - 12x + 34| = 2$ então $x^2 - 12x + 34 = 2$ ou $x^2 - 12x + 34 = -2$. No primeiro caso obtemos $x^2 - 12x + 32 = 0$, resultando em $x = 4$ ou $x = 8$.

No segundo caso temos $x^2 - 12x + 36 = 0$, donde $(x - 6)^2 = 0$, resultando em $x = 6$.

Portanto, a soma dos valores procurados é $4 + 6 + 8 = 18$.

(2) Quantos números naturais de quatro algarismos (isto é, entre 1000 e 9999, inclusive) possuem todos os dígitos pares e são divisíveis por 5?

(a) 80 **(b)** 100 **(c)** 125 **(d)** 200 **(e)** 500

B

Sugestões e Fatos que Ajudam: Determine o número de possibilidades para escolha de cada dígito e utilize o princípio multiplicativo.

Solução: Para ser divisível por 5 e par, o algarismo das unidades deve ser igual a 0.

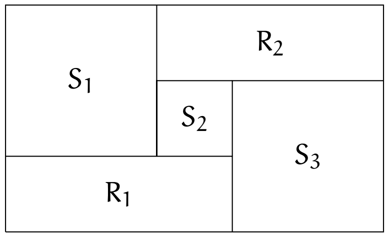
Podemos escolher o primeiro algarismo de 4 modos (2, 4, 6 ou 8), o segundo de 5 modos, o terceiro de 5 modos e o das unidades de 1 modo. Portanto, existem

$$4 \times 5 \times 5 \times 1 = 100$$

números com a propriedade desejada.

(3)

Retângulos R_1 e R_2, e quadrados S_1, S_2, e S_3, mostrados abaixo, combinam-se para formar um retângulo com 3322 unidades de largura e 2020 unidades de altura. Qual é a medida do lado de S_2?



(a) 651 **(b)** 655 **(c)** 656 **(d)** 662 **(e)** 666

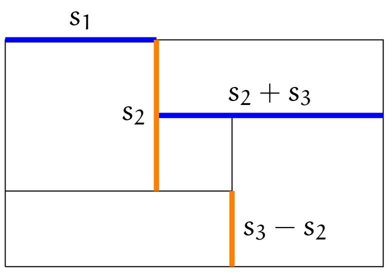
A

Sugestões e Fatos que Ajudam: Expresse as medidas dos lados do retângulo maior em função dos lados dos quadrados.

Solução: Sejam s_1, s_2 e s_3 os lados dos quadrados S_1, S_2 e S_3, respectivamente. Então a largura do maior do retângulo é $s_1 + s_2 + s_3 = 3322$ e a altura é igual $s_1 + (s_3 - s_2) = 2020$. Portanto, subtraindo estas duas equações obtemos

$$s_1 + s_2 + s_3 - (s_1 + s_3 - s_2) = 3322 - 2020,$$

donde $2s_2 = 1302$ e $s_2 = 651$.



(4) Seja f uma função definida no conjunto de números racionais positivos com a propriedade de $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ para todos os números racionais positivos a e b. Além disso, suponha que f também tenha a propriedade de $f(p) = p$ para todo número primo p. Qual dos seguintes números x é tal que $f(x) < 0$?

(a) $\frac{17}{32}$ **(b)** $\frac{11}{16}$ **(c)** $\frac{7}{9}$ **(d)** $\frac{7}{6}$ **(e)** $\frac{25}{11}$

E

Sugestões e Fatos que Ajudam: Determine $f(1)$, $f(1/p)$ e $f(p^2)$ sendo p um primo.

Solução: É claro que $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, donde obtemos $f(1) = 0$.

Seja p um número primo qualquer. Então

(1) $f(p^2) = f(p \cdot p) = f(p) + f(p)$=2p.

(2) $0 = f(1) = f(p \cdot \frac{1}{p}) = f(p) + f(1/p)$, donde $f(1/p) = -p$.

Portanto,

$$f\left(\frac{25}{11}\right) = f(5^2) + f\left(\frac{1}{11}\right) = 2 \cdot 5 - 11 = -1 < 0.$$

Usando este mesmo raciocínio, determinamos os valores dos outros itens:

(a) $f\left(\frac{17}{32}\right) = 7$

(b) $f\left(\frac{11}{16}\right) = 3$

(c) $f\left(\frac{7}{9}\right) = 1$

(d) $f\left(\frac{7}{6}\right) = 2$

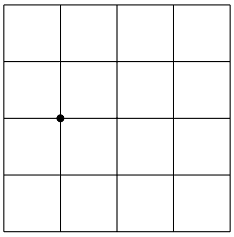
(5) Uma rã sentada no ponto $(1, 2)$ começa uma sequência de saltos, onde cada salto é paralelo a um dos eixos coordenados e tem comprimento 1, e a direção de cada salto (para cima, para baixo, direita, ou à esquerda) é escolhida de forma independente ao acaso. A sequência termina quando a rã atinge um lado do quadrado com os vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$, e $(4, 0)$. Qual é a probabilidade de que a sequência de saltos termine em um lado vertical do quadrado ?

(a) $\frac{1}{2}$ **(b)** $\frac{5}{8}$ **(c)** $\frac{2}{3}$ **(d)** $\frac{3}{4}$ **(e)** $\frac{7}{8}$

B

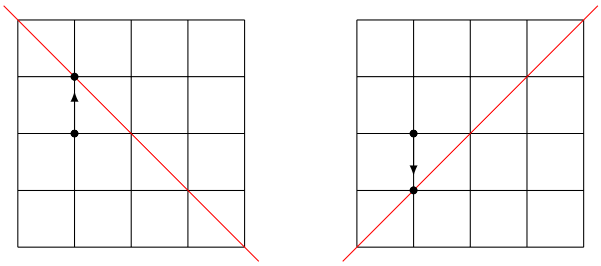
Sugestões e Fatos que Ajudam: Utilize a simetria do quadrado: se a rã estiver no centro do quadrado, a probabilidade de alcançar cada um dos lados é a mesma OU se a rã estiver numa das diagonais do quadrado, as chances de terminar em um lado horizontal ou vertical são iguais.

Solução:



Desenhando o quadrado, é fácil ver que se a rã for para a esquerda, ela atingirá imediatamente uma extremidade vertical do quadrado. Portanto, a probabilidade de isso acontecer é $\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$.

Se a rã for para a direita, ela estará no centro do quadrado em $(2, 2)$, e por simetria (já que a rã é equidistante de todos os lados do quadrado), a chance de atingir um lado vertical do quadrado é $\frac{1}{2}$. A probabilidade de isso acontecer é $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.



Se a rã subir ou descer, ela atingirá um eixo de simetria ao longo de uma diagonal e, novamente, estará em uma posição equidistante em relação aos dois lados mais próximos e também equidistante em relação aos dois outros lados. A probabilidade de atingir uma parede vertical é $\frac{1}{2}$.

Como há uma chance $\frac{1}{2}$ da rã subir ou descer, a probabilidade total para este caso é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e somando todos os casos, obtemos

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

Desafio 3

Calcule o valor mínimo de

$$\frac{9x^2 \operatorname{sen}^2 x + 4}{x \operatorname{sen} x} \qquad \text{para } 0 < x < \pi.$$

Sugestões e Fatos que Ajudam: Utilize que $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, para todos os números reais a e b.

Solução: Sejam a e b números reais positivos. Sabemos que $(a - b)^2 \geqslant 0$, donde $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ e

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geqslant 2,$$

com a igualdade ocorrendo se $a = b$. Tomando $a = 3x \operatorname{sen} x$ e $b = 2$, obtemos

$$\frac{9x^2 \operatorname{sen}^2 x + 4}{(3x \operatorname{sen} x) \cdot 2} \geqslant 2,$$

donde

$$\frac{9x^2 \operatorname{sen}^2 x + 4}{x \operatorname{sen} x} \geqslant 12.$$

A igualdade ocorre quando $3x \operatorname{sen} x = 2$, ou seja, quando $x \operatorname{sen} x = 2/3$.