Preparação para o ENA 2022
Lista 1
Soluções

www.cadernodematematica.com.br

19 de maio de 2021

(1) Qual é o valor de

$$\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2} \quad ?$$

(a) 0 **(b)** $4\sqrt{3}-6$ **(c)** 6 **(d)** $4\sqrt{3}$ **(e)** $4\sqrt{3}+6$

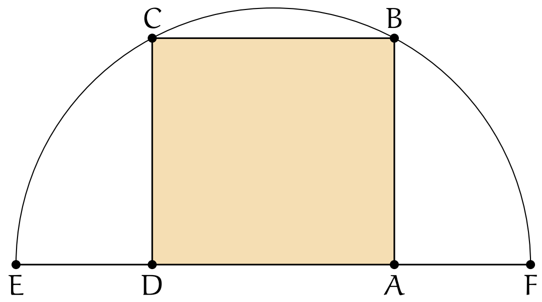
D

Sugestões e Fatos que Ajudam: Cuidado! A resposta não é 6. Lembre-se que $\sqrt{x^2}=|x|$, isto é, é igual x, se $x \geqslant 0$ e $-x$, se $x<0$.

Solução: Lembrando que $\sqrt{x^2}=|x|$ e, observando que $3-2\sqrt{3}<0$, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(3-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(3+2\sqrt{3}\right)^2} &= \left|3-2\sqrt{3}\right|+\left|3+2\sqrt{3}\right| = \\ &= (2\sqrt{3}-3)+(3+2\sqrt{3}) \\ &= 4\sqrt{3}.\end{aligned}$$

(2) O retângulo $ABCD$ está inscrito em um semicírculo de diâmetro EF, como mostrado na figura. Se $DA = 16$, e $FA = ED = 9$, determine a área de $ABCD$.

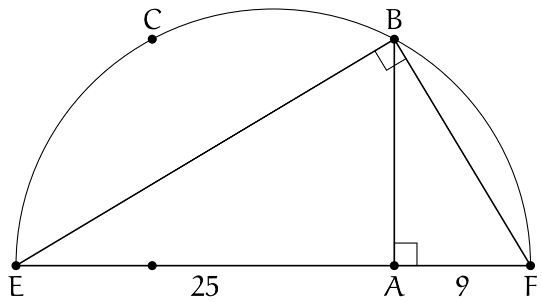


(a) 240 **(b)** 248 **(c)** 256 **(d)** 264 **(e)** 272

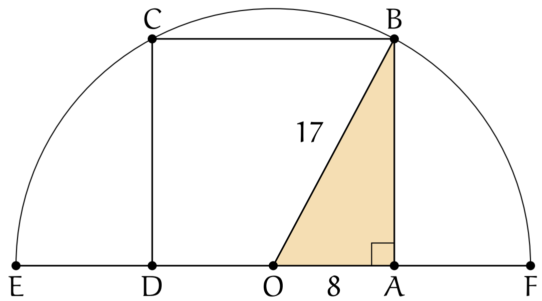
A

Sugestões e Fatos que Ajudam: Por que o triângulo EFB é retângulo? Lembre que em um triângulo retângulo, vale a igualdade $h^2 = mn$, sendo h a medida da altura relativa a hipotenusa e m e n as medidas das projeções do cateto sobre a hipotenusa.

Solução: Observe que, por estar inscrito em uma semicircunferência, o triângulo EFB é retângulo de hipotenusa EF. O segmento BA é altura relativa a hipotenusa deste triângulo, a qual divide a mesma nas projeções EA e AF. usando a relação $h^2 = mn$, obtemos $AB^2 = EA \cdot AF = 25 \cdot 9$, donde $AB = 15$. Portanto, o retângulo $ABCD$ tem área igual a $AD \times AB = 16 \times 15 = 240$.



Solução 2: Seja O o centro do semicírculo. O diâmetro do semicírculo é $9+16+9 = 34$, então $OB = 17$. Por simetria, O é de fato o ponto médio de DA, então $OD = OA = \frac{16}{2} = 8$. Pelo teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OBA, temos que AB é igual a $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Portanto, a área do retângulo $ABCD$ é $DA \times AB = 16 \times 15 = 240$.



(3) Na lista de números a seguir, o inteiro n aparece $n$vezes na lista para $1 \leqslant n \leqslant 200$.

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 200, 200, \ldots, 200.$$

Qual é a mediana dos números nesta lista?

(a) $100,5$ **(b)** 134 **(c)** 142 **(d)** $150,5$ **(e)** 167

C

Sugestões e Fatos que Ajudam: Lembre que a mediana de uma lista ordenada de números $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ é o termo central se n é ímpar, isto é, é igual ao termo a_{k+1} se $n = 2k+1$ e é igual a $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ se $n = 2k$. Quantos números possui a lista em questão?

Solução: Observe que a lista contém

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 200 = \frac{200 \times 201}{2} = 20100$$

números. A mediana é portanto, igual a média aritmética dos números nas posições 10050 e 10051. Suponha que o termo na posição 10050 seja igual a k. Então, devemos ter

$$1 + 2 + \cdots + (k-1) < 10050.$$

Portanto,

$$\frac{(k-1)k}{2} < 10050,$$

donde $k^2 - k - 20100 < 0$. Resolvendo esta inequação do segundo grau, obtemos

$$k < \frac{1 + \sqrt{8401}}{2} \approx 142,27.$$

Assim, $k \leqslant 142$. Até o bloco 142 existem

$$1 + 2 + \cdots + 142 = \frac{142 \cdot 143}{2} = 10153$$

números. Portanto, os números nas posições 10050 e 10051 são iguais a 142, de modo que a mediana é igual a 142.

Comentário: A lista de números até 141 contém $1 + 2 + \cdots + 141 = \frac{141 \times 142}{2} = 10011$ números e até 142 contém $10011 + 142 = 10153$ números.

141	142	$\ldots$	142	142	142	142	143
10011	10012		10150	10151	10152	10153	10154

Problema Relacionado: Prove que o n-ésimo número da sequência $1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$ é igual a

$$\left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8n}}{2} \right\rceil,$$

sendo $\lceil x \rceil$ o teto de x, isto é, o menor inteiro positivo maior ou igual a x.

(4) Qual dos seguintes é equivalente a

$$(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})(2^{32}+3^{32})(2^{64}+3^{64})?$$

(a) $3^{127}+2^{127}$ **(b)** $3^{127}+2^{127}+2\cdot 3^{63}+3\cdot 2^{63}$ **(c)** $3^{128}-2^{128}$ **(d)** $3^{128}+3^{128}$ **(e)** 5^{127}

C

Sugestões e Fatos que Ajudam: Utilizando que $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ fatore sucessivamente $3^{128}-2^{128}$.

Solução: Vamos generalizar os números 2 e 3 para as variáveis yex. Então obtemos:

$$(y+x)(y^2+x^2)(y^4+x^4)(y^8+x^8)(y^{16}+x^{16})(y^{32}+x^{32})(y^{64}+x^{64}).$$

Vemos que o primeiro termo é $y+x$ e o próximo é y^2+x^2. Percebemos que se multiplicarmos o primeiro termo por $y-x$, o resultado pela diferença de quadrados será y^2-x^2: podemos continuar a usar a diferença de quadrados nisso. Em outras palavras, a equação tem o efeito dominó e tudo que precisamos para começar é multiplicar a equação inteira por $y-x$ (lembrando-se de dividir por $y-x$ no final).

Agora temos:

$$\begin{aligned}
&(y-x)(y+x)(y^2+x^2)(y^4+x^4)(y^8+x^8)(y^{16}+x^{16})(y^{32}+x^{32})(y^{64}+x^{64})\\
&=(y^2-x^2)(y^2+x^2)(y^4+x^4)(y^8+x^8)(y^{16}+x^{16})(y^{32}+x^{32})(y^{64}+x^{64})\\
&=(y^4-x^4)(y^4+x^4)(y^8+x^8)(y^{16}+x^{16})(y^{32}+x^{32})(y^{64}+x^{64})=\\
&=(y^{64}-x^{64})(y^{64}+x^{64})\\
&\vdots\\
&=y^{128}-x^{128}
\end{aligned}$$

Agora podemos substituir $y=2$ e $x=3$:

$$(2-3)(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)(2^{16}+3^{16})(2^{32}+3^{32})(2^{64}+3^{64})=2^{128}-3^{128}.$$

No entanto, não devemos esquecer de dividir por $2-3=-1$ no final! Dividindo, obtemos a resposta de $3^{128}-2^{128}$.

(5) Qual é o menor valor possível de

$$(xy-1)^2+(x+y)^2$$

para números reais x e y?

(a) 0 **(b)** $\frac{1}{4}$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** 1 **(e)** 2

D

Sugestões e Fatos que Ajudam: Lembre que para todo número real x, vale a desigualdade $x^2 \geqslant 0$.

Solução: Expandindo, obtemos

$$\begin{aligned}(xy-1)^2+(x+y)^2 &= x^2y^2-2xy+1+x^2+2xy+y^2\\ &= x^2y^2+x^2+y^2+1 \geqslant 0+0+0+1=1\end{aligned}$$

A igualdade ocorre quando $x=y=0$.

Desafio 1

Sejam a, b e c números reais satisfazendo as equações

$$a^3 + abc = 26$$
$$b^3 + abc = 78$$
$$c^3 - abc = 104$$

Calcule $a^3 + b^3 + c^3$.

Sugestões e Fatos que Ajudam: Verifique e utilize as identidades

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

e

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2].$$

Utilize ainda a fatoração $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

Solução: Inicialmente note que, a partir das duas primeiras equações podemos concluir que $a \neq b$. Observe ainda que $26 + 78 = 104$, de modo que

$$a^3 + abc + b^3 + abc = c^3 - abc,$$

donde

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = 0.$$

Usando a fatoração

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)\frac{1}{2}\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right],$$

para $x = a$, $y = b$ e $z = -c$, obtemos

$$a^3 + b^3 - c^3 + 3abc = (a + b - c)\frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b + c)^2 + (-c - a)^2\right] = 0,$$

Como $(a - b)^2 > 0$, a segunda expressão acima é estritamente positiva, de modo que necessariamente devemos ter $a + b - c = 0$. Subtraindo as duas primeiras equações obtemos $b^3 - a^3 = 52$, a qual podemos escrever como

$$(b - a)(b^2 + ab + a^2) = 52. \tag{1}$$

Substituindo $c = a + b$ na terceira equação, obtemos $(a + b)^3 - ab(a + b) = 104$, colocando $(a + b)$ em evidência obtemos

$$(a + b)(a^2 + ab + b^2) = 104. \tag{2}$$

Dividindo a equação (2) pela equação 1 obtemos

$$\frac{a + b}{b - a} = 2, \therefore b = 3a, c = a + b = 4a.$$

Portanto, substituindo $b = 3a$ e $c = 4a$ na primeira equação dada obtemos $a^3 + a(3a)(4a) = 26$, donde $a^3 = 2$. Assim,

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + 27a^3 + 64a^3 = 92a^3 = 184.$$