Preparação para o ENA 2022
Lista 4
Soluções

www.cadernodematematica.com.br

02 de junho de 2021

Respostas

1	2	3	4	5	Desafio
D	**C**	**C**	**D**	**D**	**997**

(1) A soma de dois números naturais é 17402. Um dos dois números é divisível por 10. Se o dígito das unidades desse número for apagado, o outro número será obtido. Qual é a diferença entre esses dois números?

(a) 10272 **(b)** 11700 **(c)** 13362 **(d)** 14238 **(e)** 15426

D

Sugestões e Fatos que Ajudam: Se n é o menor dos inteiros, quanto é o maior?

Solução: Sendo n o menor número, o maior é igual a $10n$. Assim, $n + 10n = 17402$, donde $n = 1582$ e a diferença entre os números é igual $10n - n = 9n = 9 \cdot 14238 = 14238$.

(2) Chame um número inteiro positivo de número *crescente* se cada dígito for estritamente maior que o dígito anterior. Por exemplo, 1357, 89, e 5 são todos inteiros ascendentes, mas 32, 1240, e 466 não são. Quantos inteiros ascendentes são divisíveis por 15?

(a) 4 **(b)** 5 **(c)** 6 **(d)** 7 **(e)** 8

C

Sugestões e Fatos que Ajudam: Liste os números de acordo com a quantidade de algarismos.

Solução: Primeiro, observe como o número deve terminar em 5 ou 0 para que seja divisível por 15. No entanto, o número não pode terminar em 0 porque não é estritamente maior do que os dígitos anteriores. Portanto, nosso número deve terminar em 5. Vamos dividir em casos de acordo com a quantidade de algarismos.

- Caso 1 = 1 dígito.
- Caso 2 = 2 dígitos. Temos os números 15, 45, e 75, mas 75 não é um número ascendente, portanto, temos 2 números neste caso.
- Caso 3 = 3 dígitos. Temos os números 135, 345. São 2 números. $newline$
- Caso 4 = 4 dígitos. Temos os números 1235, 1245 e 2345, mas apenas 245 satisfaz essa condição, então 1 número.
- Caso 5 = 5 dígitos. Temos apenas 12345, portanto, 1 número.

Somando isso, temos $2 + 2 + 1 + 1 = 6$.

(3) Os valores para A, B, C, e D devem ser selecionados de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sem substituição (ou seja, não há duas letras com o mesmo valor). Quantas maneiras existem para fazer tais escolhas de modo que as duas curvas $y = Ax^2 + B$ e $y = Cx^2 + D$ se intersectem? (A ordem em que as curvas são listadas não importa; por exemplo, as escolhas $A = 3$, $B = 2$, $C = 4$, $D = 1$ são consideradas iguais às escolhas $A = 4$, $B = 1$, $C = 3$, $D = 2$.)

(a) 30 **(b)** 60 **(c)** 90 **(d)** 180 **(e)** 360

C

Sugestões e Fatos que Ajudam: Resolva o sistema formado pelas equações $y = Ax^2 + B$ e $y = Cx^2 + D$. Estabeleça condições sobre A, B, C e D para que o sistema formado pelas duas equações tenha solução.

Solução: Devemos resolver o sistema formado pelas equações

$$\begin{cases} y = Ax^2 + B \\ y = Cx^2 + D. \end{cases}$$

Igualando as expressões encontramos $Ax^2 + B = Cx^2 + D$, donde $x^2 = \frac{D-B}{A-C}$. Para que possamos encontrar x, devemos ter $\frac{D-B}{A-C} \geqslant 0$. Assim, $D - B$ e $A - C$ devem ser ambos positivos ou ambos negativos. Se dois pares distintos forem escolhidos para (A, C) e (B, D) respectivamente, há 2 maneiras de ordená-los de forma que o numerador e o denominador sejam positivos / negativos. Devemos dividir por 2 no final, entretanto, uma vez que as duas curvas não são consideradas distintas.

Podemos escolher o par (B, D) de $\binom{6}{2}$ modos e, escolhido este par, existem $\binom{4}{2}$ modos de escolher o par (A, C).

$$\frac{1}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} \cdot 2 = \cdot 15 \cdot 6 = 90.$$

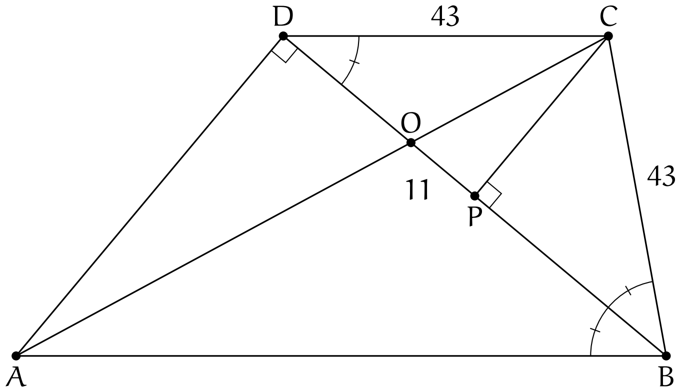
(4) O trapézio $ABCD$ tem $AB \parallel CD$, $BC = CD = 43$ e $AD \perp BD$. Seja O a intersecção das diagonais AC e BD, e seja P o ponto médio de BD. Dado que $OP = 11$, o comprimento de AD pode ser escrito na forma $m\sqrt{n}$, onde m e n são inteiros positivos e n não é divisível pelo quadrado de qualquer primo. Quanto é $m + n$?

(a) 65 **(b)** 132 **(c)** 157 **(d)** 194 **(e)** 215

D

Sugestões e Fatos que Ajudam: Mostre que os triângulos BPC e BDA são semelhantes e determine a medida de AB.

Solução:



Como P é o ponto médio da base do triângulo isósceles BCD, temos que o ângulo $B\hat{P}C$ mede $90°$.

Por outro lado, observe que $C\hat{B}D = B\hat{D}C = D\hat{B}A$ (alternos internos). Assim, os triângulos ABD e CBP são semelhantes, de modo que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{PB} = 2 \therefore AB = 2 \cdot BC = 86.$$

Os triângulos ABO e CDO também são semelhantes e, então, temos

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BO}{DO} \implies \frac{86}{43} = \frac{\frac{BD}{2} + 11}{\frac{BD}{2} - 11} \implies BD = 66.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABD, temos que

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{86^2 - 66^2} = \sqrt{(86 - 66)(86 + 66} = \sqrt{20 \cdot 152} = \sqrt{4^2 \cdot 5 \cdot 38} = 4\sqrt{190}.$$

Portanto, $m = 4$ e $n = 190$, donde $m + n = 194$.

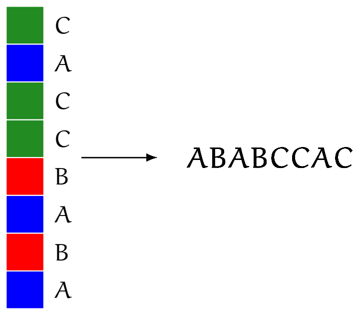
(5) Uma criança constrói torres usando cubos de cores diferentes com formatos idênticos. Quantas torres diferentes com uma altura de 8 cubos a criança pode construir com 2 cubos vermelhos, 3 cubos azuis e 4 cubos verdes? (Um cubo será deixado de fora)

(a) 24 **(b)** 288 **(c)** 312 **(d)** 1260 **(e)** 40320

D

Sugestões e Fatos que Ajudam: Divida em três casos, de acordo com a cor do cubo deixado de fora.

Solução: Lendo os cubos de baixo para cima, cada pilha consiste em uma sequência de 8 letras escolhidas dentre 3 letras A (azul), 2 letas B (vermelho) e 4 letras C (verde).



Vamos dividir em casos, de acordo com o cubo não usado. Cada pilha pode ser vista como um anagrama e para contá-los usamos a fórmula das permutações com elementos repetidos.

(i) Se o cubo excluído for o verde, o número de anagramas de AAABBCCC é $\dfrac{8!}{3!2!3!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6\cdot2\cdot6} = 560$.

(ii) Se o cubo excluído for o vermelho, o número de anagramas de AAABCCCC é $\dfrac{8!}{3!1!4!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6\cdot24} = 280$.

(iii) Se o cubo excluído for o azul, o número de anagramas de AABBCCCC é $\dfrac{8!}{2!2!4!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot2\cdot24} = 420$.

Portanto, temos um total de $560 + 280 + 420 = 1260$ possibilidades.

Segunda Solução: Organizar oito cubos é o mesmo que organizar os nove cubos primeiro e, em seguida, remover o último cubo. Em outras palavras, há uma correspondência biunívoca entre cada arranjo de nove cubos e cada arranjo válido real. Assim, inicialmente temos $9!$ possibilidades. No entanto, superestimamos, porque os cubos vermelhos podem ser permutados para ter a mesma configuração, e o mesmo se aplica aos cubos azuis e verdes. Portanto, temos que dividir pelas $2!$ maneiras de organizar os cubos vermelhos, $3!$ maneiras de organizar os cubos azuis e $4!$ maneiras de organizar os cubos verdes. Portanto, temos

$$\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!} = 1260$$

diferentes torres possíveis.

Desafio 4

A função f é definida no conjunto dos números inteiros e satisfaz

$$f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{se } n \geqslant 1000 \\ f(f(n+5)) & \text{se } n < 1000 \end{cases}$$

Determine $f(84)$.

Sugestões e Fatos que Ajudam: Utilizando a definição da função, determine k e $m \geqslant 1000$ tal que $f(84) = f^k(m)$, onde f^k representa a composta $\underbrace{f(f(\ldots f(m)\ldots))}_{\text{k vezes}}$

Solução: Aplicando sucessivamente a fórmula da função, obtemos

$$f(84) = f(f(89)) = f(f(f(94))) = f^4(99) = \cdots = f^k(999).$$

Para determinar k, observe que os números $84, 89, 94, \ldots$ formam uma Progressão Aritmética cujo primeiro termo é 84 e a razão é 5. Assim,

$$999 = 84 + (k-1)5 \implies k = 184.$$

Portanto, concluímos que $f(84) = f^{184}(999)$. Seja n um inteiro positivo maior ou igual a 3. Observe que

$$f^n(999) = f^{n+1}(1004) = f^n(1001) = f^{n-1}(998) = f^n(1003) = f^{n-1}(1000) = f^{n-2}(997) = f^{n-1}(1002) = f^{n-2}(999).$$

Portanto, $f^n(999) = f^{n-2}(999)$, para cada inteiro positivo $n \geqslant 3$. Deste modo,

$$f(84) = f^{184}(999) = f^{182}(999) = \cdots = f^2(999) = f^3(1004) = f^2(1001) = f(998) = f(f(1003)) = f(1000) = 997.$$