PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2012.1

(1) Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo (em minutos), seja $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton, $D(t)$ é uma função decrescente de t , com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t)-D(t+h)}{D(t)}$$

no intervalo de tempo $[t, t+h]$ depende apenas da duração h desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta:

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30°. A água, que fervia a 100° numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60°. Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

(2)

(a) Dado um número $a > 0$, quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a?

(b) Justifique matematicamente por que não se pode responder o item (a) se trocarmos "mínimo" por "máximo".

(3) Uma moeda honesta é lançada sucessivas vezes.

(a) Se a moeda for lançada 4 vezes, qual é a probabilidade de que o número observado de caras seja ímpar? E se a moeda for lançada 5 vezes?

(b) Observando o resultado do item (a), formule uma conjectura sobre a probabilidade de se observar um número ímpar de caras em n lançamentos da moeda.

(c) Demonstre, utilizando indução finita, a conjectura do item (b).

(4) $ABCD$ é um quadrado, M é o ponto médio do lado BC e N é o ponto médio do lado CD. Os segmentos AM e BN cortam-se em P.

(a) Mostre que $\dfrac{PB}{PN} = \dfrac{2}{3}$.

(b) Calcule a razão $\dfrac{PA}{PM}$.

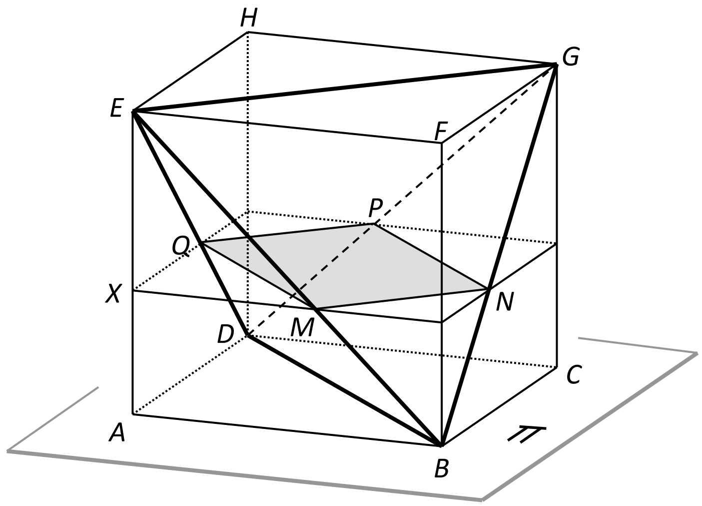
(c) Se $AB = 1$ calcule a área do quadrilátero $PMCN$.

Obs: Para mostrar os itens (b) e (c) você pode usar o resultado do item (a) mesmo que não o tenha demonstrado.

(5) Na figura abaixo, $ABCDEFGH$ é um cubo de aresta 1. AE, BF, CG e DH são arestas e a face $ABCD$ está contida em um plano horizontal Π. Seja T o tetraedro $BDEG$. Seja X um ponto da aresta AE (diferente de A e de E) e Π' o plano paralelo a Π que passa por X . A intersecção de Π' com T é o quadrilátero $MNPQ$, como mostrado na figura.

(a) Mostre que $MNPQ$ é um retângulo.

(b) Mostre que o perímetro de $MNPQ$ é igual a $2\sqrt{2}$, independentemente do ponto X.



(Atenção: como a folha de questões não será olhada na correção, se usar novos elementos na figura é conveniente explicitá-los no caderno de respostas.)

(6) Um truque de adivinhação de números.

(a) Descreva e justifique métodos práticos para obter os restos da divisão por 9, 10 e 11, respectivamente, de um número natural escrito no sistema decimal.

(b) Ache as soluções mínimas de cada uma das seguintes congruências:

(i) $110y \equiv 1 \pmod 9$

(ii) $99y \equiv 1 \pmod{10}$

(iii) $90y \equiv 1 \pmod{11}$

(c) Um mágico pede a sua audiência para escolher um número natural M de pelo menos dois algarismos e menor do que 1000, e de lhe revelar apenas os restos r_9, r_{10} e r_{11} da divisão de M por 9, 10 e 11, respectivamente (tarefa fácil, pelo item (a)). Sem nenhuma outra informação ele consegue descobrir M. Explique como ele consegue fazer isto.

(d) Supondo que a plateia tenha dado as seguintes informações ao mágico: $r_9 = 7$, $r_{10} = 8$ e $r_{11} = 9$, qual foi o valor de M que o mágico achou?

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2012.2

(1)

(a) Prove que, para quaisquer x, y, z, a, b, $c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(ax + by + cz)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

(b) Excetuando o caso trivial em que $a = b = c = 0$, mostre que vale a igualdade se, e somente se, existe $m \in R$ tal que $x = ma, y = mb$ e $z = mc$.

(2)

(a) Usando o gráfico com o qual se define geometricamente o logaritmo natural $\ln$, mostre que $\ln(1 + x) < x$ para todo $x > 0$, e daí $\ln x < x$.

(b) Tomando $\sqrt{x}$ em vez de x nesta última desigualdade, prove que para todo x suficientemente grande o quociente $\frac{\ln x}{x}$ pode tornar-se tão pequeno quanto desejemos.

(c) Prove ainda que essa conclusão é válida para logaritmos em qualquer base > 1.

(3) Uma moeda, com probabilidade $0,6$ de dar cara, é lançada 3 vezes.

(a) Qual é a probabilidade de que sejam observadas duas caras e uma coroa, em qualquer ordem?

(b) Dado que foram observadas duas caras e uma coroa, qual é a probabilidade de que tenha dado coroa no primeiro lançamento?

(4) Considere a sequência a_n definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 + 2 \\ a_3 &= 2 + 3 + 4 \\ a_4 &= 4 + 5 + 6 + 7 \\ &\dots \end{aligned}$$

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e qual é o maior desses inteiros? Calcule a_{10}.

(b) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

(5) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 6 e AD um segmento perpendicular ao plano desse triângulo de comprimento 8.

(a) Localize o ponto P do espaço que é equidistante dos quatro pontos A, B, C e D e calcule a distância comum $R = PA = PB = PC = PD$.

(b) Calcule o cosseno do ângulo entre as retas reversas AC e BD.

(6) No triângulo ABC assinale o ponto P do lado AC e o ponto Q do lado BC de forma que $AP = \dfrac{1}{3}AC$ e $BQ = \dfrac{2}{3}BC$. Seja J o ponto de interseção de AQ e BP.

(a) Mostre que $\dfrac{JA}{JQ} = \dfrac{3}{4}$. *Sugestão:* Trace QL paralelo a BP e use semelhança de triângulos.

(b) Calcule a razão $\dfrac{JB}{JP}$.

(c) Decida se a área do triângulo BPQ é maior do que, menor do que ou igual à metade da área do triângulo ABC.

(7)

(a) Mostre que nenhum número natural da forma $4n + 3$ pode ser escrito como o quadrado ou a soma de dois quadrados de números naturais.

(b) Mostre que nenhum número a da forma $11\dots1$ (n dígitos iguais a 1, $n > 1$) é o quadrado ou a soma de dois quadrados de números naturais.

(8) Considere o sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv c_1 & (\text{mod } n_1) \\ x \equiv c_2 & (\text{mod } n_2) \end{cases}$$

Denotamos como de costume o mdc e o mmc de n_1 e n_2 por (n_1, n_2) e $[n_1, n_2]$, respectivamente.

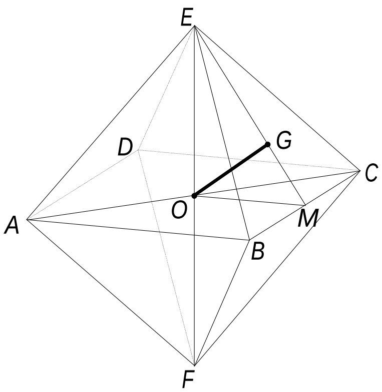
(a) Mostre que se a é solução do sistema, então a' é também solução se, e somente se, $a \equiv a' \pmod{[n_1, n_2]}$.

(b) Mostre que o sistema admite solução se, e somente se, $c_2 \equiv c_1 \pmod{(n_1, n_2)}$.

(c) Dadas as progressões aritméticas (a_n) de primeiro termo 5 e razão 14 e (b_n) de primeiro termo 12 e razão 21, mostre que elas possuem termos comuns (isto é, existem r e s tais que $a_r = b_s$). Mostre que esses termos comuns formam uma PA e determine seu primeiro termo e sua razão.

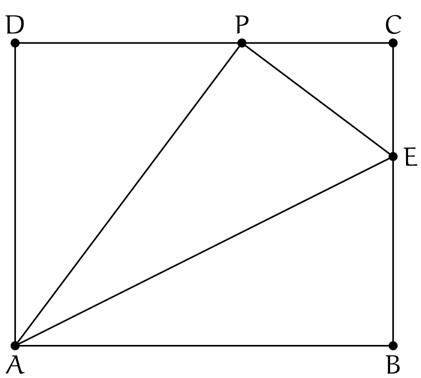
PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2012.3

(1) No octaedro regular duas faces opostas são paralelas. Em um octaedro regular de aresta a, calcule a distância entre duas faces opostas.



Obs: no seu cálculo, você pode afirmar as propriedades que está utilizando sem precisar demonstrá-las, mas deve descrevê-las detalhadamente.

(2) A figura abaixo mostra uma folha de papel retangular $ABCD$ com $AB = 25$ cm e $BC = 20$ cm. Foi feita uma dobra no segmento AE de forma que o vértice B coincidiu com o ponto P do lado CD do retângulo.



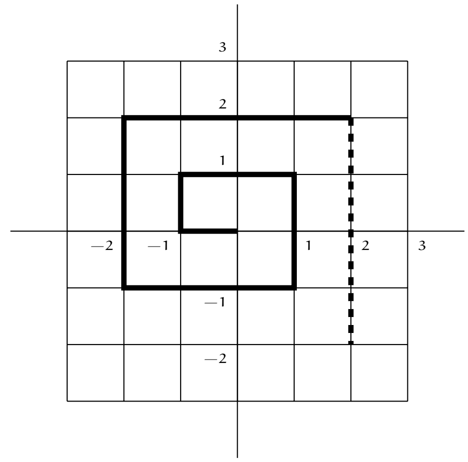
(a) Calcule o comprimento do segmento DP.

(b) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos ADP e PCE.

(c) Calcule o comprimento do segmento AE.

(3) Em uma caixa há três dados aparentemente idênticos. Entretanto, apenas dois deles são normais, enquanto o terceiro tem três faces 1 e três faces 6. Um dado é retirado ao acaso da caixa e lançado duas vezes.
Se a soma dos resultados obtidos for igual a 7, qual é a probabilidade condicional de que o dado sorteado tenha sido um dos dados normais?

(4) A linha poligonal da figura começa na origem e passa por todos os pontos de coordenadas inteiras do plano cartesiano.



(a) Seja n um número inteiro não negativo. Mostre que o comprimento $c(n)$ da linha poligonal da origem até o ponto (n, n) é igual a $4n^2$.

(b) Qual é o comprimento da linha poligonal entre os pontos $(7, 10)$ e $(11, -20)$?

(5) Um corpo está impregnado de uma substância radioativa cuja meia-vida é um ano. Quanto tempo levará para que sua radioatividade se reduza a 10% do que é?

(6) Qual é o menor valor da expressão $\sqrt{16x/y} + \sqrt{y/(81x)}$ quando x e y são números reais positivos quaisquer? Justifique sua resposta.

(7) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, é inteiro o número

$$\frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{23}{35}n.$$

(8) Um número natural m é dito um quadrado se existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $m = a^2$.

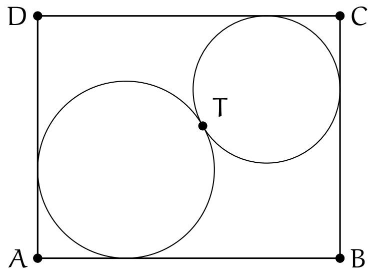
(a) Mostre que o algarismo das unidades (na base 10) de um quadrado só pode ser um dos seguintes: 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

(b) Mostre que todo quadrado é da forma $4n$ ou $4n + 1$.

(c) Mostre que nenhum número que escrito na base 10 tem a forma $m = dd\ldots d$ (todos os algarismos iguais), com $m > 10$ e $d \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, é um quadrado.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2013.1

(1) É dado um retângulo $ABCD$ tal que em seu interior estão duas circunferências tangentes exteriormente no ponto T, como mostra a figura abaixo. Uma delas é tangente aos lados AB e AD e a outra é tangente aos lados CB e CD.



(a) Mostre que a soma dos raios dessas circunferências é constante (só depende das medidas dos lados do retângulo).

(b) Mostre que o ponto T pertence à diagonal AC do retângulo.

(2) O poliedro representado na figura abaixo é tal que:

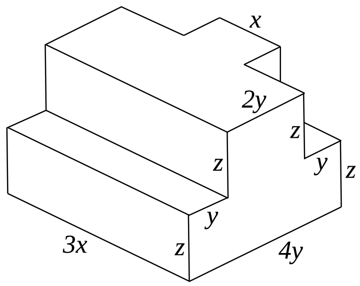
(i) há exatamente um plano de simetria;

(ii) em cada vértice, os planos das faces que se tocam são perpendiculares dois a dois, sendo possível decompor o sólido em três paralelepípedos;

(iii) as dimensões nunca ultrapassam 19;

(iv) os comprimentos das arestas são inteiros maiores do que 1;

(v) o volume é igual a 1995.



(a) Descreva o plano de simetria do poliedro.

(b) Encontre os valores de x, y e z.

(3) O objetivo desta questão é demonstrar que a função $f(x) = \cos\sqrt{x}$, $x \geqslant 0$, não é periódica, ou seja, não existe nenhum número real positivo T tal que $\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x}$, para todo $x \geqslant 0$.

(a) Encontre todos os valores de $T \geqslant 0$ para os quais $f(T) = f(0)$ e, a seguir, encontre todos os valores de $T \geqslant 0$ para os quais $f(T) = f(2T)$.

(b) Use o item (a) para mostrar que $f(x)$ não é periódica.

(4) A derivada de um polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ é, por definição, o polinômio

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1.$$

Admita a regra da derivada do produto:

$$(p.q)'(x) = p'(x).q(x) + p(x).q'(x)$$

e prove que $a \in \mathbb{R}$ cumpre $p(a) = p'(a) = 0$ se, e somente se, $p(x) = (x-a)^2s(x)$ para algum polinômio $s(x)$.

(5)

(a) Maria tem 10 anéis idênticos e quer distribuí-los pelos 10 dedos de suas mãos. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isto? Suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos.

(b) Suponha agora que os 10 anéis sejam todos distintos. De quantas maneiras Maria pode distribuí-los em seus dedos? Aqui também, suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos e que a ordem dos anéis nos dedos é relevante.

(6) Uma sequência (a_n) é tal que $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n+1} \quad \text{para todo } n \geqslant 1.$$

Mostre que os valores de a_n, para $n \geqslant 2$, são todos iguais.

(7) Seja $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e considere os conjuntos:

$$A = \{d \in \mathbb{N}; d \mid n\} \quad \text{e} \quad B = \left\{\frac{n}{c}; c \in A\right\}.$$

Denotemos por $S(n)$ a soma dos divisores naturais de n e por $S^*(n)$ a soma dos seus inversos.

(a) Mostre que $A = B$ e com isto conclua que $S^*(n) = \dfrac{S(n)}{n}$.

(b) Mostre que n é um número perfeito se, e somente se, $S^*(n) = 2$.

(8) Mostre que se p é primo, $p > 3$, então p^2 deixa resto 1 na divisão por 24.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2013.2

(1) Considere um triângulo equilátero de lado 3 e seja A_1 sua área. Ao ligar os pontos médios de cada lado, obtemos um segundo triângulo equilátero de área A_2 inscrito no primeiro. Para este segundo triângulo equilátero, ligamos os pontos médios de seus lados e obtemos um terceiro triângulo equilátero de área A_3 inscrito no segundo e assim sucessivamente, gerando uma sequência de áreas (A_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$
Usando o Princípio de Indução Finita, mostre que a fórmula $A_n = \frac{9\sqrt{3}}{4^n}$ é verdadeira para todo $n \geqslant 1$ natural.

(2) A sequência (an), $n \geqslant 0$, é definida da seguinte maneira:

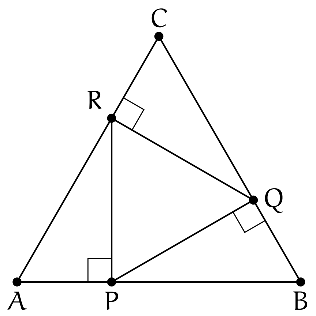
- $a_0 = 4$
- $a_1 = 6$
- $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}, n \geqslant 1$

(a) Encontre a_7.

(b) Encontre a soma dos primeiros 2013 termos da sequência.

(3) Um cone de revolução tem altura x e está circunscrito a uma esfera de raio 1. Calcule o volume desse cone em função de x.

(4) Na figura, temos um triângulo equilátero ABC e um segundo triângulo PQR cujos lados $\overline{RP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ são, respectivamente, perpendiculares aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ do triângulo ABC.



(a) Mostre que o triângulo PQR é equilátero. Conclua que $AP = BQ = CR$.

(b) Se o triângulo ABC tem área 1, encontre a área do triângulo PQR.

(5) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer.

(a) A função composta $g \circ f$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

(b) A função composta $f \circ g$ é necessariamente periódica? Em caso afirmativo, demonstre; em caso negativo, apresente um contra-exemplo.

(6) Considere a equação:

$$\frac{1}{2}|x| \cdot |x-3| = 2\left|x - \frac{2}{3}\right|$$

(a) Quais são as raízes dessa equação? Explique detalhadamente como as encontrou.

(b) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções $f(x) = \dfrac{1}{2}|x|\,|x-3|$ e $g(x) = 2\left|x - \dfrac{3}{2}\right|$ e marque as raízes que você encontrou no item (a).

(7) Determine todos os inteiros X que são soluções da congruência

$$X^{49} + X^{14} + X^{12} - 2X \equiv 0 \pmod 7$$

(8) Encontre o menor natural k, $k > 2008$, tal que $1 + 2 + \ldots + k$ seja um múltiplo de 13. Justifique sua resposta.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2014.1

(1) O máximo divisor comum de dois inteiros positivos é 20. Para se chegar a esse resultado pelo processo das divisões sucessivas, os quocientes encontrados foram, pela ordem, 1, 5, 3, 3, 1 e 3. Encontre os dois números.

(2) Dado um polígono regular convexo de n lados inscrito em um círculo de raio R, seja ℓ_n o comprimento dos lados e seja a_n a distância do centro do círculo aos lados do polígono (a_n é o *apótema* do polígono).

(a) Calcule ℓ_{12} e a_{12} em função de R.

(b) Use o item (a) para obter o valor de $\operatorname{tg} 75°$.

(3) Um quadrilátero tem os seus vértices sobre cada um dos lados de um quadrado, cujo lado tem medida 1. Sabendo que as medidas dos lados desse quadrilátero são a, b, c e d, prove que

$$2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 4.$$

(4) De uma caixa contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 retiram-se duas bolas, sem reposição. Determine a probabilidade de:

(a) o número da primeira bola ser divisível por 3 e o número da segunda bola ser divisível por 5.

(b) o número da primeira bola ser divisível por 4 ou o número da segunda bola ser divisível por 6.

(5) Para todo n inteiro positivo, seja

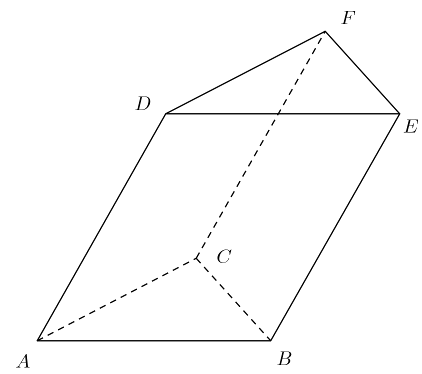
$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Prove, por indução em n, que $n + H_1 + \ldots H_{n-1} = nH_n$, para todo $n \geqslant 2$.

(6) Considere o prisma $ABCDEF$ de bases triangulares da figura.

(a) Mostre que os tetraedros $ABCE$ e $CDEF$ têm o mesmo volume.

(b) Mostre também que os tetraedros $CDEF$ e $ACDE$ têm o mesmo volume e conclua que o volume de um tetraedro é a terça parte do produto da área da base pela altura.



Informação: Assuma o fato de que dois tetraedros com bases de mesma área e alturas congruentes têm volumes iguais.

(7) Mostre que $a^7 \equiv a \pmod{21}$, para todo inteiro a.

(8) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ duas funções. Prove que:

(a) se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

(b) se $f \circ g$ é sobrejetiva, então f é sobrejetiva.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2014.2

(1) Sejam a, b, p inteiros, com p primo. Demonstre que:

(a) se p não divide a, então $(p, a) = 1$

(b) se $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.

(2) Duas sequências de números reais x_n e y_n estão relacionadas pelas recorrências

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n, \qquad y_{n+1} = 5x_n - 2y_n.$$

(a) Mostre que a sequência x_n satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 9x_n$.

(b) Suponha $x_0 = y_0 = 1$. Encontre as fórmulas gerais para as sequências x_n e y_n em função de n.

(3) Considere o triângulo ABC de lados a, b, c e alturas h_a, h_b e h_c relativas respectivamente aos lados a, b e c. Prove que ABC é semelhante a um triângulo de lados $\dfrac{1}{h_a}$, $\dfrac{1}{h_b}$ e $\dfrac{1}{h_c}$.

(4) Sejam x e y dois números racionais com $x < y$.

(a) Prove que $x < \dfrac{x+y}{2} < y$ e que $x < x + \dfrac{y-x}{\sqrt{2}} < y$.

(b) Mostre que entre dois números racionais quaisquer existe pelo menos um número racional e um irracional.

(5) Em uma cesta contendo ovos, na contagem de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de cinco em cinco, sobram 1, 2, 3 e 4 ovos, respectivamente. Qual é a menor quantidade de ovos que a cesta pode ter?

(6) Um professor do Ensino Médio propôs a seguinte questão:

"Dada a sequência $1, 4, 9, 16, \ldots$, determine o quinto termo".

Um aluno achou um resultado diferente de 25, que era a resposta esperada pelo professor. Ele obteve um polinômio $P(x)$ satisfazendo cinco condições: $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$, $P(4) = 16$ e $P(5) \neq 25$. Encontre um polinômio $P(x)$ satisfazendo as condições acima e tal que $P(5) = 36$.
Sugestão: Analise o polinômio $Q(x) = P(x) - x^2$.

(7) Considere um cubo de aresta a. A partir de um vértice, e sobre as três arestas que nele concorrem, são assinalados os pontos que distam $\frac{a}{3}$ deste vértice. Os três pontos assim obtidos, junto com o vértice do cubo, são vértices de um tetraedro. Repetindo o processo para cada vértice, e retirando-se do cubo os oito tetraedros assim formados, obtém-se o poliedro P restante. Calcule a área total de P.

(8) Considere que foram efetuadas todas as permutações possíveis dos algarismos que compõem o número 78523, listando os números obtidos em ordem crescente.

(a) Determine a posição ocupada pelo número 78523.

(b) Calcule a soma de todos os números listados.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2015.1

(1)

(a) Mostre que se x e y são números irracionais tais que x^2-y^2 seja racional não nulo, então $x+y$ e $x-y$ são ambos irracionais.

(b) Sabendo que a raiz quadrada de um número primo é irracional, prove que se p e q são primos distintos, então $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ e $\sqrt{p}-\sqrt{q}$ são números irracionais.

(2)

(a) Sabendo que

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

prove que se $x, y \in (0,\pi)$ e $x \neq y$, então

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y < 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

(b) Use o resultado do item (a) para resolver a equação

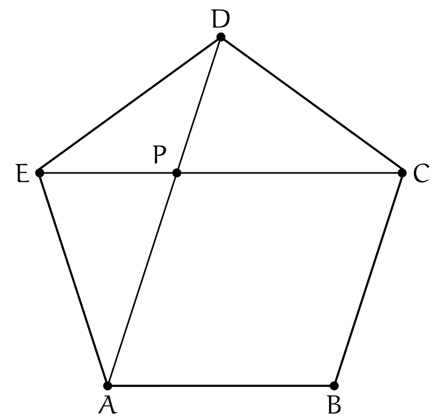
$$\sqrt{\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}\sqrt{x}} = \operatorname{sen}\left(\frac{2x+\sqrt{x}}{2}\right),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

(3) Considere o conjunto de todos os números naturais com quatro algarismos tais que os algarismos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente decrescente.

(a) Quantos elementos possui tal conjunto?

(b) Se escrevermos tais números em ordem crescente, que número ocupa a 109ª posição?

(4) As diagonais AD e CE do pentágono regular $ABCDE$ de lados de medida a, intersectam-se no ponto P. Determine $\overline{AP}$ e $\overline{PD}$ em função de a.



(5) Um cubo de 20 cm de aresta, apoiado em um piso horizontal e com a parte superior aberta, contém água até a altura de 15 cm. Colocando uma pirâmide regular de base quadrada sólida de altura 30 cm com a base apoiada no fundo do cubo, o nível da água atinge a altura máxima do cubo, sem derramar.

(a) Qual o volume do tronco de pirâmide submerso?

(b) Qual o volume da pirâmide?

(6) Sejam a, b e c inteiros tais que $a^3+b^3+c^3$ é divisível por 9. Mostre que pelo menos um dos inteiros a, b ou c é divisível por 3.

(7)

(a) Considere um conjunto formado por 11 números inteiros positivos diferentes, menores do que 21. Prove que podemos escolher dois desses números tais que um divide o outro.

(b) Exiba um conjunto com 10 números inteiros positivos, menores do que 21, tais que nenhum deles é múltiplo de outro.

(8) Considere o seguinte sistema de congruências

$$\begin{cases} X \equiv 1 \pmod 9 \\ X \equiv 5 \pmod 7 \\ X \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

(a) Encontre o menor número natural que satisfaz o sistema.

(b) Alguma solução do sistema é solução da congruência $X \equiv 926 \pmod 3$?

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2015.2

(1) Determine **TODOS** os valores possíveis para os algarismos x, y, z e t de modo que os números abaixo, representados na base 10, tenham a propriedade mencionada:

(a) $3x90586y$ é divisível por 60.

(b) $72z41t$ é divisível por 99.

(2) A altura CH e a mediana BK são traçadas em um triângulo acutângulo ABC. Sabendo que $BK \equiv CH$ e $K\hat{B}C = H\hat{C}B$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

(3)

(a) Calcule o resto da divisão de 28^{237} por 13.

(b) Determine o algarismo das unidades do número $7^{(7^{1000})}$.

(4)

(a) Prove a desigualdade de Bernoulli:
Se $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant -1$ então $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, para todo $n \geqslant 1$.

(b) Prove que a sequência $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é crescente, ou seja, que $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \geqslant 1$.

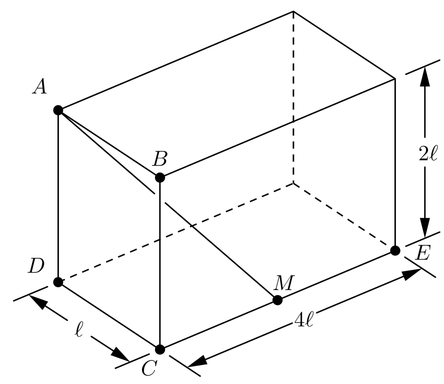
Sugestão: Mostre que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)}{(n+1)} \cdot \left[\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right]^n$ e use o item (a).

(5) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática com $a > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Considere o triângulo ABV , onde A e B são os pontos de interseção da parábola correspondente ao gráfico de f com o eixo das abcissas e V é o vértice da parábola.

(a) Mostre que $\overline{BV} = \dfrac{\sqrt{\Delta(\Delta+4)}}{4a}$.

(b) Mostre que o triângulo ABV é equilátero se, e somente se, $\Delta = 12$.

(6) No paralelepípedo reto retângulo da figura seguinte, calcule a distância do vértice C ao segmento AM, sendo M o ponto médio de CE.



(7) Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $(1 - \cos^2 x)^{\cos(3x - \frac{\pi}{4})} = 1$.

(8) Será formada uma fila com h homens e m mulheres, onde $h \geqslant 2$ e $m \geqslant 1$.

(a) Quantas filas distintas poderão ser formadas, tendo um homem no final da fila?

(b) Qual a probabilidade de uma das filas do item (a) ter um homem na primeira posição da fila?

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2016.1

(1)

(a) Seja x_0, y_0 uma solução da equação diofantina $aX+bY = c$, onde a, b são inteiros não nulos e $(a, b) = 1$. Prove que as soluções x, y em $\mathbb{Z}$ da equação são $x = x_0+tb$ e $y = y_0-ta$, com $t \in \mathbb{Z}$.

(b) Encontre TODAS as soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$ da equação $7X + 19Y = 781$.

(2) Dados dois segmentos de medidas distintas a e b, descreva como construir, com régua e compasso, segmentos de medidas $\dfrac{a+b}{2}$ e $\sqrt{ab}$.
Observação: Considere conhecida a construção de perpendiculares.

(3)

(a) Seja $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros. Se a fração irredutível $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros, é raiz de $p(X)$, mostre que a é divisor de a_0 e b é divisor de a_n.

(b) Encontre todas as raízes reais do polinômio

$$p(X) = 2X^4 + x^3 - 7X^2 - 3X + 3.$$

(4) A sequência (a_n) satisfaz as seguintes condições:

- $a_1 = \dfrac{1}{2}$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 a_n$, para $n \geqslant 2$.

(a) Determine a_2, a_3 e a_4.

(b) Conjecture uma expressão para o termo geral a_n, em função de n.

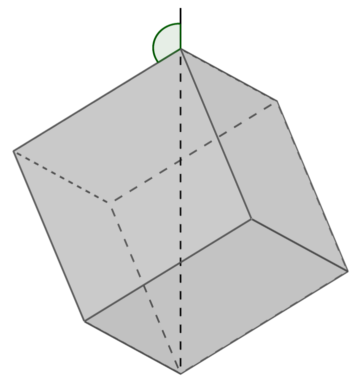
(c) Prove, por indução em n, a fórmula obtida no item (b).

(5) Se p é um número natural primo, mostre que $2^{(p+1)^3} \equiv 256 \pmod{p}$.

(6) Seja $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ uma função bijetiva, onde $[a, b]$ e $[f(a), f(b)]$ são intervalos de números reais. Considere ainda x_1, $x_2 \in [a, b]$ e y_1, y_2 números reais positivos. Mostre que existe um único $c \in [a, b]$ tal que

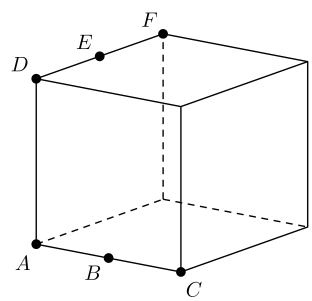
$$f(x_1)y_1 + f(x_2)y_2 = f(c)(y_1 + y_2).$$

(7) Um cubo está pendurado por um de seus vértices, de forma que a corda que o sustenta é colinear a uma das diagonais do cubo, como mostra a figura.



Determine o cosseno do ângulo entre a corda e uma das arestas do cubo que lhe são adjacentes, representado na figura.

(8) Considere os pontos A, B, C, D, E e F de um cubo distribuídos como na figura abaixo.



Determine a probabilidade de,

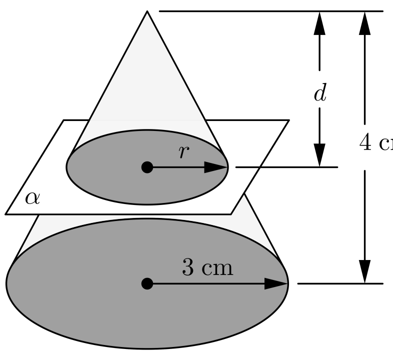
(a) escolhidos ao acaso 3 pontos distintos dentre os 6 dados, eles determinarem um único plano.

(b) escolhidos ao acaso 4 pontos distintos dentre os 6 dados, eles serem coplanares.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2016.2

(1) A secretaria de educação de um município recebeu uma certa quantidade de livros para distribuir entre as escolas do município. Sabe-se que a quantidade é superior a 1000, inferior a 2000, que se dividi-los entre 7 escolas sobram 4, entre 9 sobram 2 e entre 13 sobram 6. Encontre a quantidade de livros.

(2) O cone da figura seguinte tem 3 cm de raio e 4 cm de altura, sendo d a distância do vértice a um plano α, paralelo à base.



Determine d de modo que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais.

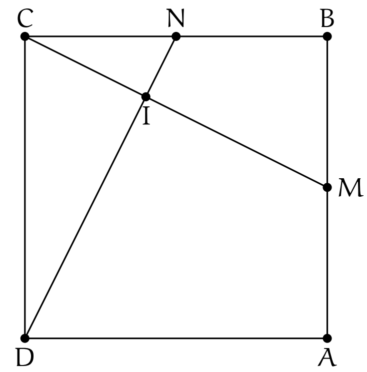
(3) Sejam x e y números reais positivos tais que $x + y = 1$. Prove que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9$.

(4)

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Se $f(k) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, mostre que a e b são inteiros.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $f(k) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que a, b e c são todos inteiros? Justifique a sua resposta.

(5) Sejam $ABCD$ um quadrado de lado 1 (uma unidade), M o ponto médio de AB, N o ponto médio de BC e I a interseção de DN e CM. Calcule a área do triângulo NIC.



(6) De quantas maneiras distintas podemos escolher três números distintos do conjunto $I_{40} = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 40\}$ de modo que sua soma seja:

(a) um número ímpar?

(b) um múltiplo de 3?

(7) Mostre que, para todo número natural $n \geqslant 1$, o resto da divisão do polinômio $x^{2n} + x + 1$ por $x^2 - 1$ é igual a $x + 2$.

(8) Dados $a, n \in \mathbb{N}$, com $a > 2$ ímpar, mostre que:

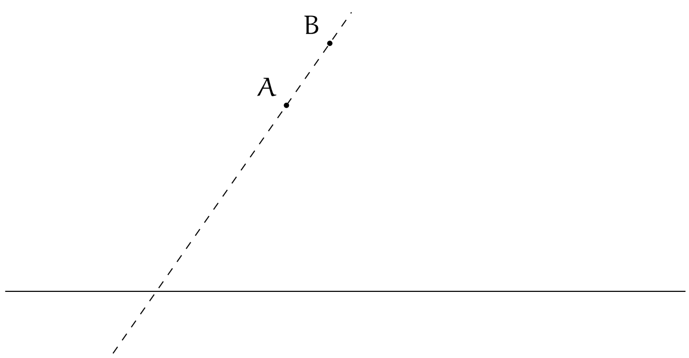
(a) se $\frac{a^n - 1}{2}$ é par então a é da forma $4k + 1$ ou n é par.

(b) se a é da forma $4k + 1$ ou n é par, então $\frac{a^n - 1}{2}$ é par.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2017.1

(1) Determine as equações das duas retas tangentes à parábola de equação $y = x^2 - 2x + 4$ que passam pelo ponto $(2, -5)$.

(2) Descreva a construção, com régua e compasso, do círculo tangente à reta r e contendo os pontos A e B da figura abaixo.



Observação: Considere conhecidas as construções, com régua e compasso, da mediatriz de um segmento, da média geométrica de dois segmentos e da perpendicular a um segmento passando por um ponto dado. Estas construções podem ser utilizadas sem maiores detalhamentos.

(3)

(a) Prove que um número inteiro positivo n possui uma quantidade ímpar de divisores positivos se, e somente se, é um quadrado perfeito.

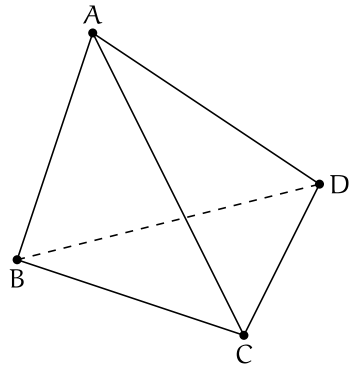
(b) Sejam a e b números inteiros positivos com $(a, b) = 1$. Prove que, se ab é um quadrado perfeito, então a e b são quadrados perfeitos.

(4) Uma permutação de n elementos é dita caótica quando nenhum elemento está na posição original. Por exemplo, $(2, 1, 4, 5, 3)$ e $(3, 4, 5, 2, 1)$ são permutações caóticas de $(1, 2, 3, 4, 5)$, mas $(3, 2, 4, 5, 1)$ não é, pois 2 está no lugar original. O número de permutações caóticas de n elementos é denotado por D_n.

(a) Determine D_4 listando todas as permutações caóticas de $(1, 2, 3, 4)$.

(b) Quantas são as permutações de $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ que têm exatamente três números em suas posições original?

(5) Um tetraedro $ABCD$ possui como base o triângulo equilátero BCD, cujos lados têm medida 1. Suas faces laterais são tais que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = l$, com $B\hat{A}C = C\hat{A}D = B\hat{A}D = \alpha$.



(a) Expresse l em função de α.

(b) Determine, em função de α, a medida da altura deste tetraedro traçada a partir de A.

(6)

(a) Prove a relação de Stifel: para todos n e p inteiros positivos com $n \geqslant p$
$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p.$$

(b) Considere a sequência de números inteiros
$$\begin{cases} a_1 = C_2^2, \\ a_n = C_2^2 + \cdots + C_{n+1}^2, n \geqslant 2. \end{cases}$$
Mostre que $a_n = C_{n+2}^3$.

(7) Uma função f é dita crescente em $X \subset \mathbb{R}$ se, para todos $x_1, x_2 \in X$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Sabendo que as funções $g(x) = x^a$ e $h(x) = b^x$ são crescentes em $[0, +\infty)$ para a e b reais com $a > 0$ e $b > 1$,

(a) prove que a função $F(x) = (1 + e^x)^{x^2+1}$ é crescente em $[0, +\infty)$;

(b) encontre as soluções não negativas da equação $(1 + e^x)^{x^2+1} = 2$.

(8)

(a) Sejam a, b, m números inteiros, com $m > 1$ e tais que $(a, m) = 1$. Prove que a congruência $ax \equiv 1 \bmod m$ possui solução. Além disso, mostre que se $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ são soluções da congruência, então $x_1 \equiv x_2 \bmod m$.

(b) Resolva a congruência $13x \equiv 1 \pmod{2436}$.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2017.2

(1) Encontre as medidas dos lados e ângulos de dois triângulos ABC diferentes tais que $\overline{AC} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e $A\widehat{B}C = 30°$.

(2) Sejam a, b e c números reais com $a \neq 0$. Considere a função
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Escreva a expressão de f na forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

(b) Utilizando o item anterior, prove que, se $b^2 - 4ac > 0$, as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, são dadas por

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{e} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(3) Considere as sequências p_n e q_n definidas recursivamente por

$$p_1 = q_1 = 1, \qquad p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2, \qquad q_{n+1} = 2p_n q_n,$$

para $n \geqslant 1$.

(a) Prove que $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$, para $n \geqslant 2$.

(b) Use o item (a) para concluir que as frações $\dfrac{p_n}{q_n}$ são irredutíveis para todo $n \geqslant 2$.

(4) Uma técnica simples para calcular o quadrado de um número natural N, representado no sistema decimal, cujo algarismo das unidades é igual a 5 é a seguinte:

(i) O algarismo das dezenas de N^2 será 2 e o das unidades será 5, ou seja, N^2 "termina" em 25.

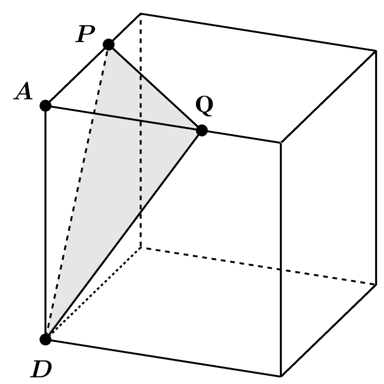
(ii) Para determinar os algarismos antecedentes a 25 em N^2, considere o número a obtido pela retirada do algarismo 5 (algarismo das unidades) do número N que se quer elevar ao quadrado e multiplique pelo seu sucessor $a + 1$. Assim, os algarismos do número $a \times (a + 1)$ serão os algarismos que antecedem o 25.

Por exemplo: $35^2 = \underline{12}25$, pois $3 \times 4 = 12$; $195^2 = \underline{380}25$, pois $19 \times 20 = 380$.

(a) Use a técnica acima para calcular 705^2 e 9995^2.

(b) Prove a validade desse resultado.

(5) Um cubo de aresta de medida 3 é intersectado por um plano, determinando o triângulo DPQ, como mostra a figura a seguir: Sabe-se que $\overline{AP} = \overline{AQ} = 2$.



(a) Calcule a área do triângulo DPQ.

(b) Determine a distância do vértice A do cubo ao plano que contém o triângulo DPQ.

(6) Sejam a, b números inteiros e p um número primo. Prove que:

(a) se $p \mid a^p - b^p$, então $p \mid a - b$.

(b) se $p \mid a^p - b^p$, então $p^2 \mid a^p - b^p$.

(7) Resolva a equação de recorrência $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ $(n \geqslant 0)$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

(8) Considere a função real definida por $f(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}(x) + \cos(x)$.

(a) Determine $\alpha \in [0, 2\pi]$ para que f possa ser escrita na forma $f(x) = 2\,\text{sen}(x + \alpha)$.

(b) Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{3}\,\text{sen}(x) + \cos(x) = 2$.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2018.1

(1) Isótopos radioativos de um elemento químico estão sujeitos a um processo de decaimento radioativo. Com o passar do tempo, uma amostra de tais isótopos vai se desintegrando, isto é, emitindo radiação e se transformando em uma amostra de átomos mais estáveis. Sabe-se que este decaimento é de tipo exponencial, isto é, denotando por $m(t)$ a massa de um determinado isótopo radioativo no instante t, tem-se

$$m(t) = m_0 \cdot b^t,$$

para algum $0 < b < 1$, $m_0 > 0$ a massa inicial. A *meia vida* deste isótopo, denotada T, é o tempo necessário para que a massa se reduza à metade de seu valor inicial.

(a) Determine b em função de T

(b) Determine, em função de T, o tempo necessário para que m se reduza a um terço de seu valor inicial.

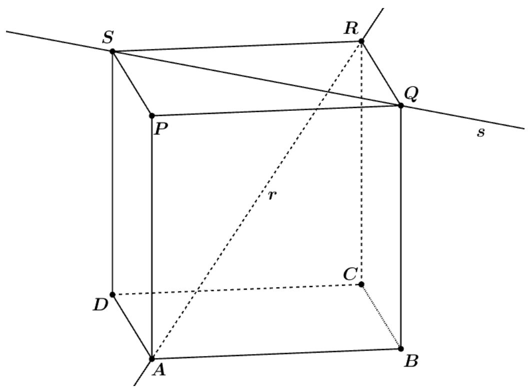
(2) O objetivo deste problema é encontrar o número natural x, menor do que 1700 e que deixe restos 2, 2, 1 e 0 quando dividido por 5, 6, 7 e 11, respectivamente. Para tanto, faça os itens a seguir:

(a) Escreva um sistema de congruências que tenha x como uma solução.

(b) Determine a solução geral do sistema do item (a).

(c) A partir da solução geral do sistema, calcule o valor de x.

(3) Dadas duas retas reversas r e s no espaço, definimos o ângulo entre r e s como sendo o menor ângulo entre r e s', onde s' é qualquer reta paralela a s e concorrente com r. Pode-se provar que este ângulo não depende da reta s' escolhida. Na figura abaixo, as retas reversas r e s são suporte, respectivamente, de uma diagonal do cubo e de uma diagonal de uma de suas faces.



Calcule, de acordo com a definição acima, o cosseno do ângulo entre r e s.

(4) Sejam (a_n) uma progressão aritmética e (b_n) a sequência definida por $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$, para todo $n \geqslant 1$. Mostre que (b_n) é uma progressão aritmética e calcule o primeiro termo e a razão de (b_n) em função do primeiro termo e da razão de (a_n).

(5)

(a) Qual a probabilidade de duas pessoas escolhidas ao acaso terem nascido no mesmo dia da semana?

(b) Em um grupo de r pessoas $(2 \leqslant r \leqslant 7)$, qual a probabilidade de haver pelo menos duas delas que tenham nascido no mesmo dia da semana?

Observação: Suponha que a probabilidade de uma pessoa nascer em determinado dia da semana seja igual a $1/7$.

(6) Para cada $n \geqslant 0$ inteiro considere o número $C(n)$ obtido pela concatenação das potências de 2, com expoentes de 0 até n, conforme exemplificado na tabela abaixo:

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	...
C(n)	**1**	**12**	**124**	**1248**	**124816**	**12481632**	...

Mostre, por indução, que $C(n)$ é divisível por 2^n para todo $n \geqslant 0$.

(7) Seja ABC um triângulo. Se P é o pé da bissetriz interna relativa ao lado BC, prove o **Teorema da Bissetriz Interna** , isto é, que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

(8)

(a) Escreva $\cos(3x)$ em termos de $\cos(x)$.

(b) Mostre que, se um número racional irredutível $\frac{r}{s}$ (r e s inteiros não nulos primos entre si) é raiz de um polinômio

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

de coeficientes inteiros, então s divide a_n e r divide a_0.

(c) Use os itens acima para mostrar que $\cos(20°)$ é um número irracional.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2018.2

(1)

(a) Sejam a, b e $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$. Mostre que $a + b \mid a^{2n} - b^{2n}$.

(b) Para quais valores de $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tem-se que $a + 2 \mid a^4 + 2$.

(2) Dados três pontos A, B e C não colineares, faça o que se pede tendo em vista que este é um problema de **Geometria Plana**.

(a) Descreva os passos de construção necessários para obter, utilizando régua e compasso, as duas retas r e s que contêm C, tais que r equidista de A e B, e s equidista de A e B.

(b) Justifique a construção anterior, isto é, explique por que os passos de construção descritos no item fornecem realmente as retas procuradas.

Observação: Considere conhecidas as construção, com régua e compasso, da mediatriz de um segmento e da paralela a um segmento passando por um ponto dado. Estas construção podem ser utilizadas sem maiores detalhamentos.

(3)

(a) Se r, s e t são as raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, mostre que $r + s + t = -a$, $rs + rt + st = b$ e $rst = -c$.

(b) Se r, s e t são as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 5x + 6 = 0$, calcule o valor de $r^2 + s^2 + t^2$.

(4) Considere as funções $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas pelas expressões abaixo:

$$f(t) = -t^2 + t\sqrt{3} + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

(a) Encontre os valores máximo e mínimo de f e os valores reais t em que f assume tais valores.

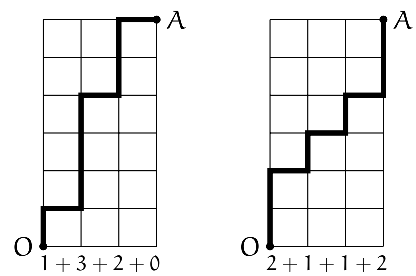
(b) Encontre os valores máximo e mínimo de g e todos os valores reais x em que g assume tais valores.

(5) Considere a equação diofantina linear $5x + 3y = 2018$.

(a) Escreva a solução geral em $\mathbb{Z}$

(b) Quantas soluções existem em $\mathbb{N} \cup \{0\}$?

(6) O método abaixo pode ser utilizado para encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$, onde r e m são inteiros positivos dados.
Vamos aplicar o método para encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Representamos as soluções como quadras de números inteiros não negativos (x_1, x_2, x_3, x_4), $x_i \in \mathbb{Z}, x_i \geqslant 0$. Uma estratégia que podemos usar para contar o número de soluções é representar cada uma delas num diagrama de quadras e ruas, contando todos os caminhos que vão do ponto O até o ponto A, sendo permitido apenas dois movimentos: subir ou deslocar para a direita. Veja na figura abaixo a representação das soluções $(1, 3, 2, 0)$ e $(2, 1, 1, 2)$.
Note que em qualquer solução temos que subir 6 quadras e fazer 3 deslocamentos para a direita. Isso corresponde ao número de anagramas da "palavra" SSSSSSDDD. Portanto o número de soluções é igual a $\frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$.



(a) Utilize o método indicado acima para calcular o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m$, onde m e r são inteiros positivos dados.

(b) Um mercado vende 5 tipos de frutas em caixa com 12 frutas, de um só tipo ou sortidas. Quantos tipos de caixas podem ser montadas?

(c) Se o mercado do item (b) resolver colocar pelo menos uma fruta de cada tipo em uma caixa, quantos tipos de caixas podem ser montadas?

(7) Duas esferas de raios r e R, com $r < R$, são tangentes interiores, isto é, possuem apenas um ponto em comum e o centro da esfera de raio r está no interior da esfera de raio R.

(a) Prove que o ponto de interseção das duas esferas é colinear aos centros destas esferas.

(b) Sabe-se que o centro da esfera menor é o ponto médio de uma das arestas de um tetraedro regular inscrito na esfera maior. Calcule r em função de R.

Dica: Sendo a a aresta do tetraedro, sabe-se que $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

(8) Considere a recorrência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ e para $n > 0$,

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n.$$

(a) Determine o termo geral da recorrência.

(b) Quantos múltiplos de 7 há no conjunto $\{a_n \mid 1 \leqslant n \leqslant 2018, n \in \mathbb{Z}\}$?

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2019.1

(1) Resolva as seguintes recorrências:

(a) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0$, $a_0 = 1$ e $a_1 = 3$.

(b) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$, $a_0 = -1$, $a_1 = 6$.

(2)

(a) Prove, usando indução, que $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

(b) Prove, usando congruências, que $11^{n+2}+12^{2n+1}$ é divisível por 133, para qualquer número natural n.

(3) Dado um número real x, o *piso* de x, denotado $\lfloor x \rfloor$, é o único inteiro k tal que $k \leqslant x < k + 1$.

(a) Considere a e b, respectivamente, o menor e o maior número natural com n algarismos expressados no sistema decimal. Forneça expressões algébricas para a e b em função de n.

(b) Mostre que a quantidade de algarismos, no sistema decimal, do número inteiro positivo N é igual a $\lfloor \log N \rfloor + 1$, onde log é a função logaritmo decimal.

(c) Mostre que se p é um inteiro positivo, então $2^p - 1$ tem $\lfloor p \cdot \log 2 \rfloor + 1$ algarismos no sistema decimal.

(4) Dados dois segmentos de comprimentos s e q, com $s > 2q$, indique a construção com régua e compasso, de segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação do segundo grau $x^2 - sx + q^2 = 0$.

(5) Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios com, respectivamente, a e b elementos.

(a) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função **bijetiva** de A em B? Nesta condição, quantas funções bijetivas existem?

(b) Qual a relação entre a e b para que exista alguma função **injetiva** de A em B? Nesta condição, quantas funções injetivas existem?

(6) Considere a função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

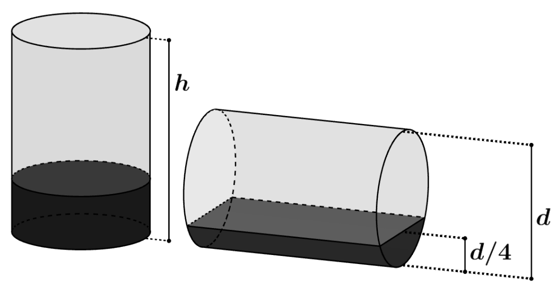
$$f(x) = (x^2 + 2019x - 1)^2 + (2x + 2019)^2$$

(a) Determine constantes k e h tais que a função possa ser reescrita da maneira $f(x) = (x^2 + kx + 1)^2 + h$.

(b) Usando a expressão encontrada no item anterior, encontre o menor valor real α, assumido pela função f.

(c) Encontre a média aritmética de todas as raízes reais da equação $f(x) = \alpha$, com α encontrado no item anterior.

(7) Um recipiente cilíndrico de base circular está parcialmente cheio de água. Quando "deitado", isto é, apoiado sobre uma de suas geratrizes, o nível da água atinge um quarto do diâmetro d da base do cilindro, conforme figura. Quando o cilindro é "levantado", isto é, apoiado sobre uma de suas bases, o nível da água atinge que fração da altura h do cilindro?



Observação: Considere desprezível a espessura das paredes e das bases do recipiente.

(8)

(a) Determine o menor número natural c para o qual a equação

$$5X + 7Y = c$$

tenha exatamente 4 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Determine, explicitamente, as 4 soluções obtidas no item (a).

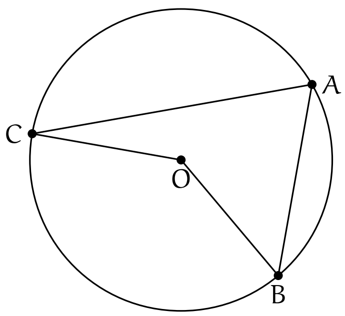
PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2019.2

(1)

(a) Prove que, se p é primo e $p \neq 3$, então p^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

(b) Sejam p, q, r e n primos positivos tais que $n = p^2 + q^2 + r^2$. Mostre que um dos primos p, q, r é igual a 3.

(2) O **Teorema do Ângulo Inscrito** afirma que se AB e AC são cordas de um círculo de centro O, então a medida do ângulo inscrito $\angle BAC$ é igual à metade do ângulo central $\angle BOC$ correspondente. Prove esse teorema no caso em que o ângulo $\angle BAC$ contém o centro O em seu interior.



(3) Sabendo que u e v são as raízes reais da equação $x^2 + bx + c = 0$, onde $b, c \in \mathbb{R}$, encontre:

(a) Uma equação do segundo grau, com coeficientes dados em função b e c, que tenha como raízes u^2 e v^2.

(b) Uma equação do segundo grau, com coeficientes dados em função de b e c, que tenha como raízes u^3 e v^3.

(4)

(a) Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z + t = 98$.

(b) Determine o número de soluções inteiras não negativas da inequação $x + y + z \leqslant 98$.

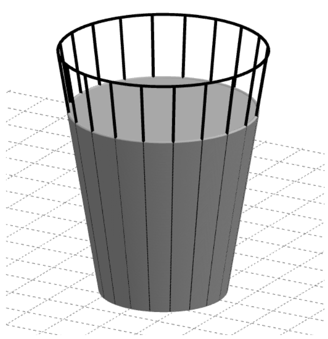
(5) Você tem dinheiro aplicado à taxa de 10% ao mês. Suponha que, com esse dinheiro, deseja comprar um bem e você tem duas opções de pagamento:

(i) À vista no valor de R\$ 3.500,00.

(ii) Em 2 prestações mensais fixas de R\$ 2.000,00, vencendo a primeira um mês após a compra.

Qual das opções é a mais vantajosa financeiramente?

(6) O copo em forma de tronco de cone circular reto representado na figura está apoiado em uma superfície perfeitamente horizontal e tem as seguintes medidas: raio da base superior igual a 5 cm, raio da base inferior igual a 3 cm e altura igual a 12 cm. Se esse copo está preenchido com água até a altura de 9 cm, pergunta-se: é possível transferir toda a água contida em um outro copo de 200 mL, completamente cheio, para o copo que aparece na figura sem que este transborde?



Informação: O volume V de um tronco de cone cujos raios das bases são R e r e cuja altura é h é dado por $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

(7) Considere duas progressões aritméticas, de razões não nulas:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \quad \text{e} \quad (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$$

Mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n, \ldots$.

(8)

(a) Mostre que se a, b e c são inteiros tais que $a \mid (b + c)$ e $a \mid b$, então $a \mid c$.

(b) Determine os números primos tais que p divide $3^p + 382$.

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2020.1

(1) Determine um número inteiro entre 1200 e 1400 que deixa resto 2 e 6 quando dividido, respectivamente, por 11 e 13.

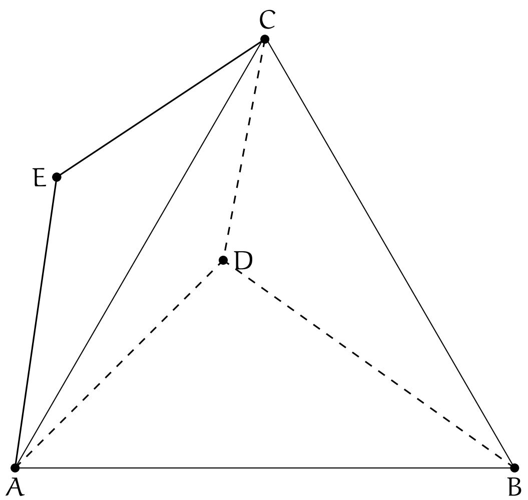
(2) Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Existe um número real x tal que $5x + 7 < 2 - x < 7x + 8$.

(b) Se x é um número real tal que $x > 3$, então $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

(c) Para todo número real x, tem-se que $x < 1 \Longrightarrow x^2 < 1$.

(3) Seja D um ponto no interior de um triângulo equilátero ABC de lado ℓ tal que $\overline{AD} = 7$, $\overline{BD} = 8$ e $\overline{CD} = 5$. Considere um ponto E no exterior do triângulo ABC, conforme a figura, tal que o ângulo $D\hat{C}E = 60°$ e $\overline{CD} = \overline{CE}$.



(a) Mostre que os triângulos ACE e BCD são congruentes.

(b) Determine os comprimentos dos segmentos AE e DE.

(c) Encontre a medida do ângulo $A\hat{E}D$.

(d) Encontre o valor de ℓ.

(4) Dizemos que dois polinômios $p(X)$ e $q(X)$ são tangentes para $X = r$ quando a diferença $p(X) - q(X)$ é divisível por $(X - r)^2$

(a) Mostre que $p(X) = aX^2 + bX + c$ e $q(X) = (2ar + b)X + (c - ar^2)$ são tangentes para $X = r$.

(b) Seja $p(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ em que $n \geqslant 2$ e $a_1 \neq 0$. Encontre o polinômio de grau 1 que é tangente a $p(X)$ para $X = 0$.

(5)

(a) Quais são os possíveis restos da divisão do quadrado de um número inteiro por 5?

(b) Uma *tripla pitagórica* é uma tripla de inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Use o item (a) para mostrar que em toda tripla pitagórica sempre há um múltiplo de 5.

(6) Um poliedro é dito *inscritível* se existir uma esfera que passa por todos os seus vértices. Mostre que um prisma reto cuja base é um polígono regular é um poliedro inscritível.

(7) Seja $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4 + \dfrac{2b}{x^2}$, onde a e b são números reais positivos.

(a) Calcule $f\left(\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}\right)$

(b) Use a desigualdade das médias para provar que o valor encontrado no item anterior é o valor mínimo de f.

(8) Um ônibus possui 32 poltronas distribuídas em 8 fileiras, ou seja, quatro em cada fileira, duas em cada lado do corredor. Pergunta-se:

(a) Se forem os primeiros a entrar no ônibus, de quantas formas uma criança e seus dois responsáveis podem ocupar três poltronas do ônibus de modo que todos fiquem na mesma fileira e um dos adultos fique ao lado da criança, sem que esteja separado pelo corredor?

(b) Se outras 29 pessoas já entraram no ônibus, ocupando as poltronas de forma completamente aleatória, deixando apenas 3 poltronas livres, qual a probabilidade de que seja possível os três se sentarem da forma estabelecida no item anterior?

PROFMAT – Exame Nacional de Qualificação 2020.2

(1) Determine a equação da reta tangente à parábola $y = x^2+x+1$ no ponto $P = (1, 3)$ usando o seguinte procedimento:

- Escreva a equação da reta passando pelo ponto $P = (1, 3)$ com inclinação m.
- Determine m de modo que a interseção entre a parábola $y = x^2 + x + 1$ e a reta r tenha um único ponto, no caso o ponto P.

(2) A *expansão de Cantor* de um número inteiro positivo a é a soma

$$a = a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \cdots + a_2 2! + a_1 1!$$

onde a_i é um inteiro com $0 \leqslant a_i \leqslant i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ e $a_n \neq 0$.
Por exemplo $110 = 4 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$.

(a) Encontre a expansão de Cantor de 719

(b) Prove, por indução em m, que

$$\sum_{j=1}^{m-1} j \cdot j! = m! - 1, \text{para todo } m \geqslant 2.$$

(3) Uma expressão exponencial a^b com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ é menor que 1 nos seguintes casos:

$$a < 1 \quad \text{e} \quad b > 0 \qquad \text{ou} \qquad a > 1 \quad \text{e} \quad b < 0.$$

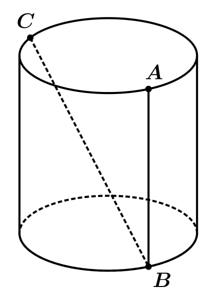
Usando essa informação, determine o conjunto solução da inequação

$$|2x + 1|^{x^3-6x^2+11x-6} < 1,$$

em que $x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{1}{2}$.

(4) Considere um triângulo ABC. Sejam M o ponto médio do segmento BC e Γ a circunferência tal que o segmento AB é um diâmetro. Prove que $\overline{AB} = \overline{AC}$ se, e somente se, M pertence à circunferência Γ.

(5) No cilindro circular reto da figura, o raio da base mede 3 cm e a altura mede 9 cm. Sabe-se ainda que o segmento AB é perpendicular às bases e que o comprimento do menor arco AC é, em centímetros, 2π.



(a) Determine a medida do segmento BC

(b) Determine o ângulo $A\hat{B}C$.

(6)

(a) Mostre a solução da recorrência

$$\begin{cases} x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0 \\ x_0 = 3; x_1 = 45 \end{cases}$$

é da forma $a_n \cdot b_n$ em que a_n é uma progressão aritmética e b_n um progressão geométrica

(b) Encontre uma recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes, indicando as condições iniciais, cuja solução é a sequência

$$x_n = (a + nr) \cdot q^n$$

em que a, r e q são números reais.

(7)

(a) Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$, onde a e b são números inteiros, então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

(a) Resolva a equação diofantina $X^2 + Y^2 = 637$.

(8) Seja m um número natural. Dois números inteiros a e b são ditos congruentes módulo m se os restos da divisão euclidiana de a e b por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m, escreve-se

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Suponha que a, b, $m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Prove que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m \mid b - a$.