


**CURSO  
INTEGRAL  
ENA  
PROFMAT**

**Prof. Paulo Rodrigues**





CADERNOS DE MATEMÁTICA  
CADERNOSDEMATEMATICA.COM.BR

 **YouTube** /cadernosdematematica

Licenciado Exclusivamente para  
Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

---

# Apresentação

Caro(a) **Cadernos de Matemática,**

Bem-vindo ao curso Cadernos de Matemática preparatório para o Exame de Acesso ao PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Esta apostila foi cuidadosamente elaborada para oferecer a você uma preparação sólida e abrangente, visando o sucesso na sua jornada rumo ao mestrado profissional em matemática.

**Sobre o PROFMAT:** O PROFMAT é um programa de pós-graduação stricto sensu em Matemática, destinado a professores de Matemática em exercício nas escolas públicas brasileiras. Seu objetivo é aprimorar a formação desses educadores, proporcionando-lhes uma visão mais profunda e atualizada da disciplina, além de promover a melhoria do ensino de matemática no país.

**Sobre o Curso Integral ENA PROFMAT:** Nosso curso foi desenvolvido por uma equipe de professores especializados, com vasta experiência na preparação para exames de ingresso em programas de pós-graduação. A apostila abrange os principais tópicos que serão avaliados no Exame de Acesso ao PROFMAT, garantindo que você esteja apto a enfrentar os desafios propostos.

O que você encontrará nesta apostila:

1. **Conteúdo Básico:** Pré-requisitos essenciais para o bom desenvolvimento do conteúdo a ser estudado.
2. **Conteúdo Essencial:** Tópicos fundamentais e avançados que serão cobrados no exame, abordando todos os conceitos importantes.
3. **Conteúdo Avançado:** Antecipação dos temas que serão explorados no PROFMAT, complementando os conteúdos de cada capítulo.
4. **Exemplos:** Exemplos práticos e exercícios para cada conceito apresentado, visando consolidar seu entendimento.
5. **Exercícios Propostos:** Exercícios frequentemente cobrados no Exame Nacional de Acesso do PROFMAT.
6. **Desafios:** Problemas que exigem um nível de conhecimento superior ao normalmente cobrado no ENA.
7. **Textos Complementares:** Artigos e ensaios curtos no final dos capítulos, abordando assuntos correlatos.

**Como Utilizar Esta Apostila:** Recomendamos que você siga uma abordagem organizada, começando pelos tópicos fundamentais e progredindo para os mais avançados. Faça os exercícios propostos e os simulados para testar seus conhecimentos. Esteja aberto para revisar os conceitos sempre que necessário.

**Desejamos a Você Sucesso no Exame de Acesso ao PROFMAT:** A equipe responsável por este curso está aqui para apoiá-lo em sua jornada. Acreditamos no seu potencial e estamos comprometidos em fornecer os recursos necessários para que você atinja seus objetivos acadêmicos.

Boa sorte!

Prof. Paulo Rodrigues

---

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Porcentagem</b>	<b>9</b>
1.1	Debandada da Torcida do Corinthians . . . . .	9
1.2	Porcentagem . . . . .	10
1.2.1	Definição de Porcentagem . . . . .	10
1.2.2	Relação com Frações e Decimais . . . . .	10
1.2.3	Cálculo da Variação Percentual . . . . .	10
1.2.4	Calculando o Valor Final após aumento ou desconto . . . . .	11
1.2.5	Calculando Aumentos e Descontos Sucessivos Rapidamente . . . . .	11
1.3	Exercícios Resolvidos . . . . .	12
1.4	Exercícios Propostos . . . . .	17
1.5	Porcentagem “Por dentro” e conta de luz . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Proporção</b>	<b>21</b>
2.1	Razão . . . . .	21
2.1.1	Propriedade das Razões . . . . .	21
2.1.2	Números Diretamente Proporcionais . . . . .	21
2.1.3	Divisão em Partes Proporcionais . . . . .	22
2.1.4	Números Inversamente Proporcionais . . . . .	22
2.2	Regras de Três Simples . . . . .	22
2.2.1	Grandezas Diretamente Proporcionais . . . . .	22
2.2.2	Grandezas Inversamente Proporcionais . . . . .	23
2.3	Regra de Três Composta . . . . .	23
2.4	Exercícios Resolvidos . . . . .	24
2.5	Exercícios Propostos . . . . .	26
2.6	Desafios . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Equação do Primeiro Grau e Função Afim</b>	<b>29</b>
3.1	Equação do Primeiro Grau . . . . .	29
3.1.1	Propriedades da Igualdade . . . . .	29
3.1.2	Propriedades Aditiva e Multiplicativa da Igualdade . . . . .	29
3.1.3	Resolvendo uma Equação do Primeiro Grau . . . . .	29
3.2	Definição . . . . .	29
3.3	Domínio, Contradomínio e Imagem . . . . .	30
3.3.1	Função Sobrejetora . . . . .	30
3.3.2	Função Injetora . . . . .	30
3.3.3	Função Bijetora . . . . .	31
3.3.4	Produto Cartesiano . . . . .	31
3.3.5	Gráfico de um função . . . . .	31
3.3.6	Taxa de Variação . . . . .	32
3.4	Função Afim . . . . .	32
3.5	Exercícios Resolvidos . . . . .	33
3.6	Desafios Resolvidos . . . . .	40
3.7	Exercícios Propostos . . . . .	42
3.8	Desafios . . . . .	45
3.9	Nem só de xis vive a Matemática . . . . .	46
3.10	Grandezas físicas para exemplificar a função afim . . . . .	47

<b>4</b>	<b>Equação do Segundo Grau</b>	<b>49</b>
4.1	Pré-requisitos . . . . .	49
4.1.1	Propriedade Distributiva . . . . .	49
4.1.2	Produtos Notáveis . . . . .	49
4.1.3	Identidades Básicas . . . . .	50
4.2	Função Quadrática . . . . .	50
4.2.1	Forma Canônica ou padrão . . . . .	50
4.2.2	Raízes . . . . .	51
4.2.3	Quantidade de Raízes Reais . . . . .	51
4.2.4	Soma e Produto das Raízes . . . . .	51
4.2.5	Formação da Equação a partir da Soma e do Produto das Raízes . . . . .	53
4.2.6	Forma Fatorada do Trinômio de Segundo Grau . . . . .	54
4.2.7	Valores Máximo e Mínimo da Função Quadrática . . . . .	54
4.2.8	Estudo do Sinal da Função Quadrática . . . . .	55
4.2.9	Gráfico da Função Quadrática . . . . .	56
4.3	Exercícios Resolvidos . . . . .	58
4.4	Desafios Resolvidos . . . . .	66
4.5	Exercícios Propostos . . . . .	66
4.6	Existe mais de um tipo de infinito? . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Progressões</b>	<b>71</b>
5.1	Sequências . . . . .	71
5.1.1	Definição . . . . .	71
5.1.2	Sequências Recorrentes . . . . .	71
5.2	Progressões Aritméticas . . . . .	72
5.2.1	Definição . . . . .	72
5.2.2	Soma dos Termos . . . . .	72
5.2.3	Somatório . . . . .	73
5.3	Progressões Geométricas . . . . .	74
5.3.1	Soma dos Termos . . . . .	74
5.4	Exercícios Resolvidos . . . . .	75
5.5	Desafios Resolvidos . . . . .	76
5.6	Exercícios Propostos . . . . .	78
5.7	A Série Harmônica Diverge . . . . .	80
5.8	Alergia pelo número 7 . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Triângulos Semelhantes</b>	<b>81</b>
6.1	Triângulos Semelhantes . . . . .	81
6.2	Propriedades dos Triângulos Semelhantes . . . . .	81
6.3	Teorema Fundamental da Semelhança . . . . .	82
6.4	Condições necessárias e suficientes . . . . .	82
6.5	Razão entre áreas . . . . .	82
6.6	Exercícios Resolvidos . . . . .	83
6.7	Exercícios Propostos . . . . .	86
6.8	Desafios . . . . .	90
6.9	A geometria do A4 . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Teorema de Pitágoras</b>	<b>93</b>
7.1	Teorema de Pitágoras . . . . .	93
7.1.1	Demonstração dos Elementos de Euclides . . . . .	93
7.1.2	Ternas Pitagóricas . . . . .	94
7.1.3	Generalização – Lei dos Cossenos . . . . .	94
7.2	Classificação de um triângulo em relação aos ângulos . . . . .	94
7.2.1	Relação de Stewart . . . . .	95
7.3	Exercícios Resolvidos . . . . .	95
7.4	Desafios Resolvidos . . . . .	99
7.5	Exercícios Propostos . . . . .	101
7.6	Desafios . . . . .	104

<b>8</b>	<b>Áreas</b>	<b>105</b>
8.1	Calculando Áreas . . . . .	105
8.2	Comparando Áreas . . . . .	107
8.3	Volumes . . . . .	109
8.3.1	Volume do Prisma . . . . .	109
8.3.2	Volume do Paralelepípedo . . . . .	109
8.3.3	Volume da Pirâmide . . . . .	109
8.3.4	Volume do Cone . . . . .	110
8.3.5	Volume da Esfera . . . . .	110
8.3.6	Razão entre volumes de sólidos semelhantes . . . . .	110
8.4	Exercícios Resolvidos . . . . .	111
8.5	Exercícios Propostos . . . . .	116
8.6	Desafios . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Trigonometria</b>	<b>123</b>
9.1	No Triângulo Retângulo . . . . .	123
9.1.1	Definição . . . . .	123
9.2	Ângulos Notáveis . . . . .	123
9.3	Circunferência Trigonométrica . . . . .	124
9.4	Adição de Arcos . . . . .	125
9.5	Transformação de Soma em Produto . . . . .	125
9.6	Principais Arcos . . . . .	125
9.7	Exercícios Resolvidos . . . . .	127
9.8	Exercícios Propostos . . . . .	129
9.9	Desafios . . . . .	132
<b>10</b>	<b>Métodos de Contagem</b>	<b>133</b>
10.1	Princípio Aditivo . . . . .	133
10.2	Princípio Multiplicativo . . . . .	133
10.3	Número de Subconjuntos de um Conjunto . . . . .	137
10.4	Permutações . . . . .	138
10.4.1	Anagramas . . . . .	139
10.5	Permutações Circulares . . . . .	140
10.6	Combinações . . . . .	140
10.7	Permutações com objetos nem todos distintos . . . . .	142
10.8	Exercícios Resolvidos . . . . .	143
10.9	Desafios Resolvidos . . . . .	147
10.10	Exercícios Propostos . . . . .	148
10.11	Desafios . . . . .	152
10.12	O homem que sempre ganhava nas corridas de cavalo . . . . .	153
<b>11</b>	<b>Probabilidade</b>	<b>155</b>
11.1	Introdução . . . . .	155
11.2	Conceitos Fundamentais . . . . .	155
11.2.1	Experimento Aleatório . . . . .	155
11.2.2	Espaço Amostral (S) . . . . .	155
11.2.3	Evento (E) . . . . .	155
11.2.4	Tipos de Eventos . . . . .	155
11.3	Definições e Teoremas Básicos . . . . .	155
11.3.1	Probabilidade Clássica . . . . .	155
11.3.2	Probabilidade Empírica . . . . .	156
11.3.3	Probabilidade Subjetiva . . . . .	156
11.3.4	Axiomas de Kolmogorov . . . . .	156
11.3.5	Teorema da Probabilidade Total . . . . .	156
11.3.6	Teorema de Bayes . . . . .	156
11.4	Operações com Eventos . . . . .	156
11.4.1	União de Eventos . . . . .	156
11.4.2	Interseção de Eventos . . . . .	156
11.4.3	Complemento de um Evento . . . . .	156
11.5	Probabilidade Condicional . . . . .	156

11.5.1	Definição . . . . .	156
11.5.2	Independência de Eventos . . . . .	157
11.6	Teorema . . . . .	157
11.7	Exercícios Resolvidos . . . . .	157
11.8	Desafios Resolvidos . . . . .	163
11.9	Exercícios Propostos . . . . .	163
11.10	Desafios . . . . .	166
<b>12</b>	<b>Estatística</b>	<b>167</b>
12.1	Medidas de Tendência Central . . . . .	167
12.1.1	Média Aritmética . . . . .	167
12.1.2	Média Geométrica . . . . .	167
12.1.3	Média Harmônica . . . . .	168
12.1.4	Mediana . . . . .	168
12.1.5	Moda . . . . .	169
12.2	Medidas de Dispersão . . . . .	169
12.3	Exercícios Resolvidos . . . . .	170
12.4	Exercícios Propostos . . . . .	171
12.5	Desafios . . . . .	173
12.6	As médias nunca explicadas (e outras medidas de posição) . . . . .	174
<b>13</b>	<b>Provas do ENA</b>	<b>175</b>
13.1	ENA 2022 . . . . .	175
13.2	ENA 2023 . . . . .	179
13.3	ENA 2024 . . . . .	183

### 1.2.4 Calculando o Valor Final após aumento ou desconto

#### ✂ Importante

Para calcular o valor de um produto que teve aumento percentual  $t$ , multiplicamos o valor inicial por  $1 + t$ . Se for um desconto, multiplicamos por  $1 - t$ .

Assim,

$$V_F = V_I(1 \pm t),$$

no qual o sinal é positivo se for aumento e negativo se for desconto.

#### Exemplo 1.3

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

Um produto custa R\$ 2,40, mas terá um aumento de R\$ 15%. Qual o novo valor?

**Resolução:** Temos que  $V_I = 2,40$  e  $t = 0,15$ . Assim,

$$V_F = 2,40 \times (1 + 0,15) = 2,40 \times 1,15 = 2,76.$$

### 1.2.5 Calculando Aumentos e Descontos Sucessivos Rapidamente

Para dominar a porcentagem, é essencial praticar a resolução de problemas que envolvem cálculos de porcentagem. Isso pode incluir cálculos de desconto, juros, lucro, taxas de crescimento e muito mais. A prática constante é a chave para aprimorar suas habilidades nessa área.

#### ☠ Cuidado!

O aumento total não é igual à soma dos aumentos. Por exemplo, se um produto sofreu dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, o aumento total será de 32%, e não de 30%.

Atenção! Para calcular aumentos percentuais sucessivos, NÃO é necessário calcular cada aumento ou desconto separadamente, sempre em relação ao valor atual.

Para calcular o aumento total, basta multiplicar os fatores de aumento (ou desconto) sucessivos, somando 1 ao fator de cada aumento (ou subtraindo 1 do fator de cada desconto) e multiplicando os resultados.

Por exemplo, se um produto sofreu dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, o fator de aumento total será

$$1,1 \times 1,2 = 1,32,$$

ou seja, um aumento total de 32%.

Veja os exemplos:

Aumento(s)	Multiplicar por
10%	1,1
15%	1,15
$t\%$	$1 + t\%$
10% e 15%	$1,10 \times 1,15$
20%, 5% e 30%	$1,20 \times 1,05 \times 1,30$

Desconto(s)	Multiplicar por
10%	0,90
15%	0,85
$t\%$	$1 - t\%$
10% e 15%	$0,90 \times 0,85$
20%, 5% e 30%	$0,80 \times 0,95 \times 0,70$

Variação	Multiplicar por
+10% e -20%	$1,1 \times 0,8$
-25% e +18%	$0,75 \times 1,18$
-23%, -9% e -11%	$0,77 \times 0,91 \times 0,89$



### 2.2.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

Com a colaboração de 8 pessoas, a grama em um parque pode ser aparada em 120 minutos. Agora, questionamos: em quanto tempo seria concluída a tarefa se 12 pessoas estivessem trabalhando? Neste problema, destacam-se duas variáveis: o número de pessoas envolvidas no trabalho e o tempo necessário para realizar a tarefa.

Vamos assumir que todas as pessoas possuam um desempenho igual no trabalho. Quando a quantidade de pessoas aumenta, o tempo necessário diminui proporcionalmente; se o número de pessoas dobra, o tempo é reduzido pela metade; se triplica, o tempo é reduzido para um terço, e assim por diante. Concluímos, então, que a quantidade de pessoas e o tempo necessário são grandezas inversamente proporcionais.

Se denotarmos por  $t$  o tempo, em minutos, necessário para aparar a grama com o esforço de 12 pessoas, podemos explorar essa relação inversa:

Pessoas	Tempo (min)
8	240
12	$t$

Como as grandezas são inversamente proporcionais, podemos escrever

$$12t = 8 \cdot 240 \implies t = 160\text{min.}$$

## 2.3 Regra de Três Composta

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

A diferença entre a regra de três simples e a regra de três composta é que a primeira lida com duas grandezas, enquanto a segunda lida com três ou mais grandezas. Embora neste texto vamos resolver problemas envolvendo três grandezas, a abordagem para lidar com mais grandezas é a mesma.

### Exemplo da regra de três composta envolvendo grandezas diretamente proporcionais

Estamos tirando água do poço na fazenda dos meus avós. Sabemos que 5 garrafas de 2 litros de água pesam 10 quilos. Quanto pesam duas garrafas de 3 litros?

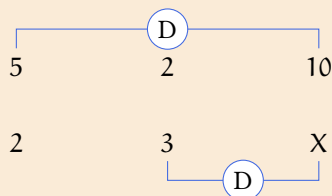
As três grandezas neste problema são: garrafas, litros e quilos. Escrevemos a relação entre elas sabendo que:

Garrafas	Litros	Quilos
5	2	10
2	3	X

Agora precisamos calcular a relação entre as grandezas, sempre comparando com a grandeza em que o desconhecido é X.

Comparando garrafas com quilos: Se houver menos garrafas, elas pesarão menos. Há uma proporção direta.

Comparando litros com quilos: Se houver mais litros, eles pesarão mais. Também há uma proporção direta.



Agora escrevemos as relações na forma de fração, para poder encontrar o desconhecido X. A primeira fração inclui a variável a ser encontrada (isso não é obrigatório, mas ajuda a resolver mais tarde). Em seguida, representamos a multiplicação das duas frações como uma equação.

$$\frac{10}{X} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \implies X = 6.$$

As garrafas pesam 6 kg.

---

## Capítulo 3

# Equação do Primeiro Grau e Função Afim

### 3.1 Equação do Primeiro Grau

---

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

#### 3.1.1 Propriedades da Igualdade

1. (Reflexiva)  $a = a$
2. (Simétrica) Se  $a = b$ , então  $b = a$ .
3. (Transitiva) Se  $a = b$  e  $b = c$ , então  $a = c$ .

#### 3.1.2 Propriedades Aditiva e Multiplicativa da Igualdade

Resolvemos uma equação do primeiro grau utilizando os princípios aditivo e multiplicativo.

- Se  $a = b$ , então  $a + c = b + c$ ;
- Se  $a = b$ , então  $ac = bc$ .

#### 3.1.3 Resolvendo uma Equação do Primeiro Grau

Uma equação do primeiro grau é uma equação que pode ser escrita na forma  $ax + b = 0$ , com  $a$  e  $b$  constantes e,  $a \neq 0$ .

A solução da equação é  $x = -\frac{b}{a}$ .

De fato, utilizando as propriedades aditiva e multiplicativa, temos

$$ax + b = 0 \implies ax + \cancel{b} + (-\cancel{b}) = 0 + (-b) \implies ax = -b \implies \cancel{a} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = -b \cdot \frac{1}{a} \implies x = -\frac{b}{a}.$$

É importante observar que a solução acima só é válida se  $a \neq 0$ . Esse detalhe tem sido bastante explorado nas provas do ENA, como veremos adiante.

### 3.2 Definição

---

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

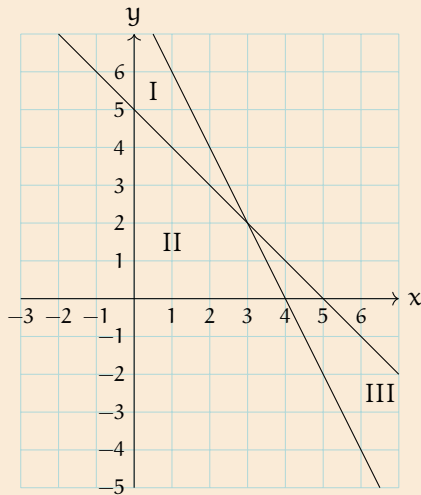
O que é uma função? Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , uma função  $f : A \rightarrow B$  associa a cada elemento  $x \in A$  um elemento  $y \in B$ . Assim, dizemos que  $f(x) = y$ .

Uma função é formada por três partes: um conjunto  $A$  denominado domínio, um conjunto  $B$  chamado contradomínio, e uma regra (ou correspondência)  $f$ , que associa a cada elemento de  $A$  um único elemento  $f(x)$  de  $B$ . Frequentemente dizemos “a função  $f$ ” em vez de “a função  $f : A \rightarrow B$ ”.

Por exemplo, para  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{0, 1, 2, 4, 17\}$ , uma função é ilustrada na figura abaixo. A seta que aponta do elemento  $a \in A$  para o elemento  $b \in B$  indica que  $f(a) = b$ . Assim,  $f(3) = 1$ .

**(3.31)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 O conjunto solução do sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$$



é a região do plano identificada na figura acima pelo(s) número(s):

- (A) I, apenas      (B) II, apenas.      (C) I e III, apenas.  
 (D) II e III, apenas.      (E) I, II e III.

**(3.32)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Representando por  $\min(a; b)$  o menor dos números reais  $a$  e  $b$ , o conjunto solução da inequação  $\min(x + 3; 1 - x) < 1$  é dado por:

- (A)  $(-2, 0)$       (B)  $(-2, -1)$       (C)  $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$   
 (D)  $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$       (E)  $\emptyset$

**(3.33)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Usaremos a notação  $\max(a, b)$  para indicar o maior dos números reais  $a$  e  $b$ , isto é,

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{se } a \geq b \\ b & \text{se } b > a \end{cases}$$

Podemos afirmar que a solução da inequação  $\max(3x + 4, 2 - x) > 7$  é o conjunto

- (A)  $\emptyset$       (B)  $-5 < x < 1$       (C)  $x > 1$   
 (D)  $x < -5$       (E)  $x < -5$  ou  $x > 1$

**(3.34)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Sobre a equação  $\sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{x^2} = 1$ , podemos afirmar:

- (A) a única raiz é  $x = 0$   
 (B) a única raiz é  $x = 1$   
 (C) o conjunto solução é  $\{0, 1\}$   
 (D) o conjunto solução é o intervalo  $[0, 1]$   
 (E) o conjunto solução é  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

**(3.35)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Uma distribuidora de água possui dois tanques com capacidade de 60.000 litros cada, um deles completamente vazio e o outro completamente cheio. No mesmo instante, o primeiro começa a ser enchido a uma taxa constante, de forma a estar completamente cheio em seis horas, e o segundo começa a ser esvaziado, também a uma taxa constante, de forma a estar completamente vazio em três horas. Em quanto tempo, após o começo do processo, os tanques possuirão exatamente a mesma quantidade de água?

- (A) 1 h      (B) 1 h 30 min      (C) 2 h      (D) 2 h 30 min      (E) 3 h

**(3.36)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Quando aberta, uma torneira A é capaz de encher completamente um tanque em 10 horas, mantendo vazão constante. Uma outra torneira B esvazia o tanque com uma vazão constante ainda desconhecida. Em um certo momento, com o tanque totalmente vazio, abriu-se a torneira A. Duas horas depois, a torneira também B foi aberta. As duas torneiras permaneceram desta forma e, exatamente três horas depois, o tanque ficou de novo totalmente vazio. Em quantas horas a torneira B conseguiria esvaziar totalmente o tanque, a partir de algum instante em que ele estivesse completamente cheio, mantendo a torneira A fechada?

- (A) 2      (B) 3      (C) 4      (D) 5      (E) 6

### 3.8 Desafios

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

**(3.37)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Para cada valor real de  $x$ ,  $f(x)$  é definido como o valor mínimo entre os três números  $2x + 2$ ,  $\frac{1}{2}x + 1$  e  $-\frac{3}{4}x + 7$ . Qual é o valor máximo de  $f(x)$ ?

- (A)  $2/3$       (B) 2      (C)  $17/5$       (D)  $62/11$       (E) 7

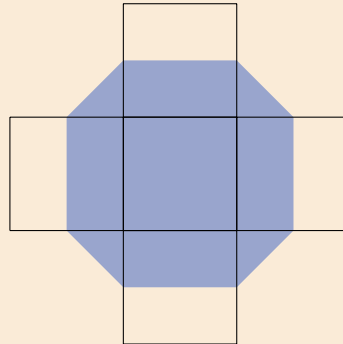
## 8.4 Exercícios Resolvidos

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

### Exemplo 8.2

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é  $1 \text{ cm}^2$ , qual a área do polígono sombreado?



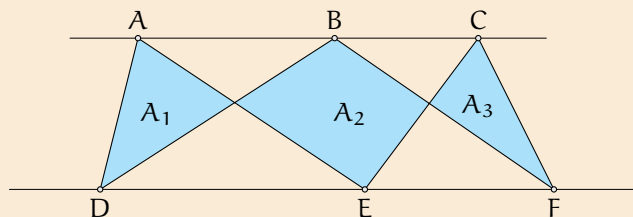
- (A)  $2 \text{ cm}^2$       (B)  $2,5 \text{ cm}^2$       (C)  $3 \text{ cm}^2$       (D)  $3,5 \text{ cm}^2$       (E)  $4 \text{ cm}^2$

**Resolução:** A região sombreada é formada pelo quadrado central, quatro retângulos cada um com metade da área de um quadrado e quatro triângulos cada um com um oitavo da área de um quadrado. Logo a área da região sombreada é  $1 + 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = 3,5 \text{ cm}^2$

### Exemplo 8.3

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

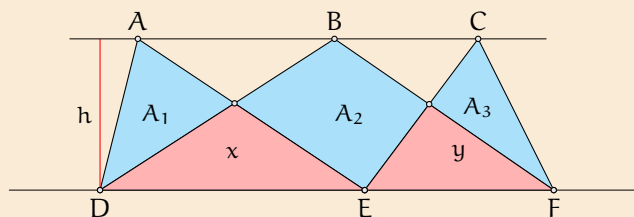
Na figura abaixo os pontos A, B, C são colineares, assim como os pontos D, E, F. As retas AB e DE são paralelas.



Sejam  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  as áreas das regiões destacadas na figura, podemos afirmar que:

- (A)  $A_2 = 2A_1 = 2A_3$   
 (B)  $A_2 = A_1 + A_3$   
 (C)  $A_2 > A_1 + A_3$   
 (D)  $A_2 < A_1 + A_3$   
 (E)  $A_2^2 = A_1 \cdot A_3$

**Resolução:**



Observe que

$$A_{ADE} + A_{CEF} = \frac{DE \times h}{2} + \frac{EF \times h}{2} = \frac{DF \times h}{2} = A_{DBF}.$$

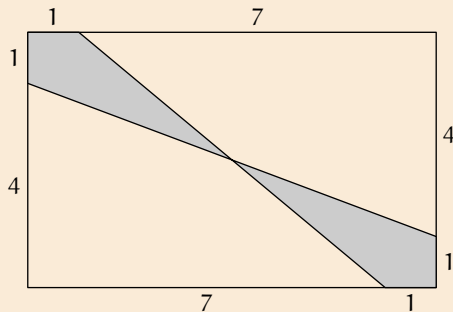
Portanto,  $A_1 + x + A_3 + y = A_2 + x + y$ , donde  $A_2 = A_1 + A_3$ .

**(8.24)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 O octógono regular ABCDEFGH tem área  $n$ . Seja  $m$  a área do quadrilátero ACEG. Quanto é  $\frac{m}{n}$ ?

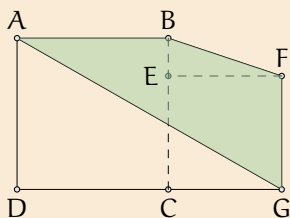
- (A)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$     (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     (C)  $\frac{3}{4}$     (D)  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$     (E)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

**(8.25)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 O quadrado AIME tem lados de 10 unidades. O triângulo isósceles GEM tem base EM, e a área comum ao triângulo GEM e ao quadrado AIME é 80 unidades quadradas. Encontre o comprimento da altura relativa a EM no  $\triangle GEM$ .

**(8.26)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Encontre a área da região sombreada.



**(8.27)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Na figura, ABCD e EFGC são quadrados de áreas  $R$  e  $S$ , respectivamente.



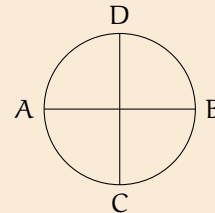
Qual é a área da região cinza?

- (A)  $\frac{R+S}{2}$     (B)  $\frac{R-S}{2}$     (C)  $\frac{RS}{2}$   
 (D)  $\sqrt{RS}$     (E)  $\sqrt{R^2+S^2}$

**(8.28)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 São dados os pontos A e B no plano, tais que a distância AB é igual a 10 unidades. Quantos pontos C existem no plano de forma que o perímetro do  $\triangle ABC$  seja 50 unidades e a área de  $\triangle ABC$  seja 100 unidades quadradas?

- (A) 0  
 (B) 2  
 (C) 4  
 (D) 8  
 (E) infinitos

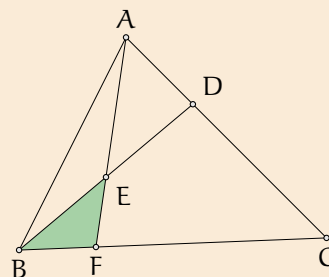
**(8.29)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Uma empresa cobra por metro quadrado de forro de gesso. Quando precisa forrar uma superfície circular, o empreiteiro multiplica as medidas de dois diâmetros do círculo para estimar a área ( $AB \times CD$ , na figura). Essa estratégia de cálculo da área do círculo apresenta um resultado superior ao correto, fazendo com que a empresa cobre um valor a mais do que quando a área é calculada pela fórmula correta.



Com um custo de R\$50,00 por metro quadrado, qual das opções melhor se aproxima do valor cobrado a mais pela empresa para forrar uma superfície circular com raio de 2 metros?

- (A) R\$172,00    (B) R\$160,00    (C) R\$140,00  
 (D) R\$125,00    (E) R\$100,00

**(8.30)** Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020  
 Em um triângulo ABC, o ponto D divide o lado  $\overline{AC}$  de tal modo que  $AD : DC = 1 : 2$ . Seja E o ponto médio de  $\overline{BD}$  e seja F o ponto de interseção das retas BC e AE. Sabendo que a área de  $\triangle ABC$  é  $360 \text{ cm}^2$ , determine a área do  $\triangle EBF$  em  $\text{cm}^2$ .



- (A) 24    (B) 30    (C) 32    (D) 36    (E) 40

**Resolução:** Existem  $100/2 = 50$  números pares no conjunto considerado. Já os múltiplos de 3 são  $\lfloor 100/3 \rfloor = 33$ . Destes 16 são pares e 17 ímpares (observe que dois múltiplos de três consecutivos têm paridades distintas). Portanto, existem  $50 - 16 = 34$  números pares não divisíveis por 3 e a probabilidade procurada é

$$\frac{34}{100} = \frac{17}{50}.$$

**Exemplo 11.10**

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

Uma caixa contém 5 fichas, numeradas de 1 a 5. As fichas são sorteadas aleatoriamente uma de cada vez e sem reposição até que a soma dos valores sorteados exceda 4. Qual é a probabilidade de que 3 sorteios sejam necessários?

- (A) 1/15                      (B) 1/10                      (C) 1/6                      **(D) 1/5**                      (E) 1/4

**Resolução:** Três sorteios serão necessários nos seguintes casos relativos aos dois primeiros sorteios: (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1). A probabilidade de um desses eventos ocorrer é

$$\frac{4}{5 \times 4} = \frac{1}{5}.$$

**Exemplo 11.11**

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. A probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe é:

- (A) 1/2                      (B) 2/5                      (C) 3/5                      **(D) 12/25**                      (E) 13/25

**Resolução:** Podemos fazer uma tabela considerando todos os casos. Existem  $5 \times 5 = 25$  resultados possíveis e em 13 destes a soma é par. Portanto, a probabilidade procurada é igual a  $13/25$ .

	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

**Segunda Solução:** A probabilidade de que o resultado dê par é :

$$P_{a+b=\text{par}} = P_{a \text{ par}, b \text{ par}} + P_{a \text{ ímpar}, b \text{ ímpar}};$$

Sabe-se que, a probabilidade de uma pessoa escolher um número par é  $P_{\text{par}} = \frac{2}{5}$ , uma vez que existem 2 números pares, dentre os 5 possíveis.

E que a probabilidade de uma pessoa escolher um número ímpar é  $P_{\text{ímpar}} = \frac{3}{5}$ , uma vez que existem 3 números ímpares, dentre os 5 possíveis.

Assim, basta calcular  $P_{a+b=\text{par}}$ :

$$P_{a+b=\text{par}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25}.$$

**Exemplo 11.12**

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

Seis inteiros distintos são escolhidos aleatoriamente em  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ . Qual é a probabilidade de que, entre os selecionados, o segundo menor seja 3?

- (A)  $\frac{1}{60}$                       (B)  $\frac{1}{6}$                       **(C)  $\frac{1}{3}$**                       (D)  $\frac{1}{2}$                       (E) nda

**Resolução:** Existem  $\binom{10}{6}$  modos de escolher 6 números distintos dentre 10 escolhas possíveis.

# Capítulo 13

## Provas do ENA

### 13.1 ENA 2022

Licenciado exclusivamente para Cadernos de Matemática • CPF 12345678 • 26/03/2020

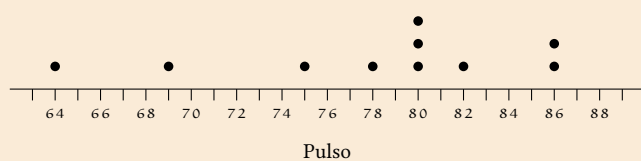
(1) Se tomarmos  $x$  como incógnita e o número real  $m$  como um parâmetro na equação  $-6 + m^2x = 3m + 4x$ , é correto afirmar que:

- (A) para cada valor de  $m$ , a equação possui uma única solução.
- (B) a equação possui solução única se, e somente se,  $m \neq -2$
- (C) se a equação possui infinitas soluções, então  $m = -2$
- (D) se a equação não possui solução, então  $m = -2$
- (E) se a equação possui infinitas soluções, então  $m = 2$

(2) Quantos são os gabaritos possíveis de uma prova de 30 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

- (A) 150
- (B)  $\frac{30!}{25!5!}$
- (C)  $30^5$
- (D)  $\frac{30!}{5!}$
- (E)  $5^{30}$

(3) Uma pessoa mediu dez vezes seus batimentos cardíacos através do seu pulso e obteve os resultados apresentados em batimentos por minuto (bpm) no seguinte diagrama de pontos:



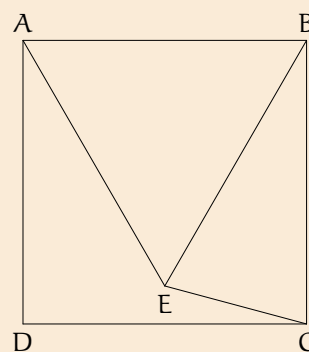
Sobre os dados obtidos por ela é correto afirmar que:

- (A) A média é igual a 77 bpm.
- (B) A moda é igual à mediana.
- (C) A mediana é igual à média.
- (D) A mediana é menor que a média
- (E) A moda, a média e a mediana são iguais.

(4) A quantidade de números naturais divisíveis por 5 e com 5 algarismos, no sistema decimal, é igual a

- (A) 20000
- (B) 18000
- (C) 13122
- (D) 10080
- (E) 6048

(5) Na figura abaixo, temos um quadrado ABCD e um triângulo equilátero ABE.



Indicando por  $\alpha$  o ângulo ECD, podemos afirmar que  $\text{tg } \alpha$  é igual a

- (A)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$
- (B)  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$
- (C)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$
- (D)  $2 + \sqrt{3}$
- (E)  $2 - \sqrt{3}$

(6) Uma moeda é lançada 10 vezes. A probabilidade de obter exatamente 4 caras é igual a

- (A)  $\frac{1}{1024}$
- (B)  $\frac{1024}{4}$
- (C)  $\frac{1024}{6}$
- (D)  $\frac{1024}{105}$
- (E)  $\frac{1024}{210}$