CURSO INTEGRAL ENA PROFMAT

Prof. Paulo Rodrigues

Cadernos de Matemática
cadernosdematematica.com.br

YouTube /cadernosdematematica

Apresentação

Caro(a) **Cadernos de Matemática**,

Bem-vindo ao curso Cadernos de Matemática preparatório para o Exame de Acesso ao PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Esta apostila foi cuidadosamente elaborada para oferecer a você uma preparação sólida e abrangente, visando o sucesso na sua jornada rumo ao mestrado profissional em matemática.

Sobre o PROFMAT: O PROFMAT é um programa de pós-graduação stricto sensu em Matemática, destinado a professores de Matemática em exercício nas escolas públicas brasileiras. Seu objetivo é aprimorar a formação desses educadores, proporcionando-lhes uma visão mais profunda e atualizada da disciplina, além de promover a melhoria do ensino de matemática no país.

Sobre o Curso Integral ENA PROFMAT: Nosso curso foi desenvolvido por uma equipe de professores especializados, com vasta experiência na preparação para exames de ingresso em programas de pós-graduação. A apostila abrange os principais tópicos que serão avaliados no Exame de Acesso ao PROFMAT, garantindo que você esteja apto a enfrentar os desafios propostos.

O que você encontrará nesta apostila:

1. **Conteúdo Básico**: Pré-requisitos essenciais para o bom desenvolvimento do conteúdo a ser estudado.
2. **Conteúdo Essencial**: Tópicos fundamentais e avançados que serão cobrados no exame, abordando todos os conceitos importantes.
3. **Conteúdo Avançado**: Antecipação dos temas que serão explorados no PROFMAT, complementando os conteúdos de cada capítulo.
4. **Exemplos**: Exemplos práticos e exercícios para cada conceito apresentado, visando consolidar seu entendimento.
5. **Exercícios Propostos**: Exercícios frequentemente cobrados no Exame Nacional de Acesso do PROFMAT.
6. **Desafios**: Problemas que exigem um nível de conhecimento superior ao normalmente cobrado no ENA.
7. **Textos Complementares**: Artigos e ensaios curtos no final dos capítulos, abordando assuntos correlatos.

Como Utilizar Esta Apostila: Recomendamos que você siga uma abordagem organizada, começando pelos tópicos fundamentais e progredindo para os mais avançados. Faça os exercícios propostos e os simulados para testar seus conhecimentos. Esteja aberto para revisar os conceitos sempre que necessário.

Desejamos a Você Sucesso no Exame de Acesso ao PROFMAT: A equipe responsável por este curso está aqui para apoiá-lo em sua jornada. Acreditamos no seu potencial e estamos comprometidos em fornecer os recursos necessários para que você atinja seus objetivos acadêmicos.

Boa sorte!

Prof. Paulo Rodrigues

Conteúdo

1.2.4 Calculando o Valor Final após aumento ou desconto

Importante

Para calcular o valor de um produto que teve aumento percentual t, multiplicamos o valor inicial por $1+t$. Se for um desconto, multiplicamos por $1-t$.
Assim,

$$V_F = V_I(1 \pm t),$$

no qual o sinal é positivo se for aumento e negativo se for desconto.

Exemplo 1.3

Um produto custa R\$ 2,40, mas terá um aumento de R\$ 15%. Qual o novo valor?

Resolução: Temos que $V_I = 2,40$ e $t = 0,15$. Assim,

$$V_F = 2,40 \times (1+0,15) = 2,40 \times 1,15 = 2,76.$$

1.2.5 Calculando Aumentos e Descontos Sucessivos Rapidamente

Para dominar a porcentagem, é essencial praticar a resolução de problemas que envolvem cálculos de porcentagem. Isso pode incluir cálculos de desconto, juros, lucro, taxas de crescimento e muito mais. A prática constante é a chave para aprimorar suas habilidades nessa área.

☠ Cuidado!

O aumento total não é igual à soma dos aumentos. Por exemplo, se um produto sofreu dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, o aumento total será de 32%, e não de 30%.

Atenção! Para calcular aumentos percentuais sucessivos, NÃO é necessário calcular cada aumento ou desconto separadamente, sempre em relação ao valor atual.

Para calcular o aumento total, basta multiplicar os fatores de aumento (ou desconto) sucessivos, somando 1 ao fator de cada aumento (ou subtraindo 1 do fator de cada desconto) e multiplicando os resultados.

Por exemplo, se um produto sofreu dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, o fator de aumento total será

$$1,1 \times 1,2 = 1,32,$$

ou seja, um aumento total de 32%.

Veja os exemplos:

Aumento(s)	Multiplicar por
10%	$1,1$
15%	$1,15$
$t\%$	$1+t\%$
10% e 15%	$1,10 \times 1,15$
20%, 5% e 30%	$1,20 \times 1,05 \times 1,30$

Desconto(s)	Multiplicar por
10%	$0,90$
15%	$0,85$
$t\%$	$1-t\%$
10% e 15%	$0,90 \times 0,85$
20%, 5% e 30%	$0,80 \times 0,95 \times 0,70$

Variação	Multiplicar por
$+10\%$ e -20%	$1,1 \times 0,8$
-25% e $+18\%$	$0,75 \times 1,18$
-23%, -9% e -11%	$0,77 \times 0,91 \times 0,89$

2.2.2 Grandezas Inversamente Proporcionais

Com a colaboração de 8 pessoas, a grama em um parque pode ser aparada em 120 minutos. Agora, questionamos: em quanto tempo seria concluída a tarefa se 12 pessoas estivessem trabalhando? Neste problema, destacam-se duas variáveis: o número de pessoas envolvidas no trabalho e o tempo necessário para realizar a tarefa.

Vamos assumir que todas as pessoas possuam um desempenho igual no trabalho. Quando a quantidade de pessoas aumenta, o tempo necessário diminui proporcionalmente; se o número de pessoas dobra, o tempo é reduzido pela metade; se triplica, o tempo é reduzido para um terço, e assim por diante. Concluímos, então, que a quantidade de pessoas e o tempo necessário são grandezas inversamente proporcionais.

Se denotarmos por t o tempo, em minutos, necessário para aparar a grama com o esforço de 12 pessoas, podemos explorar essa relação inversa:

Pessoas	Tempo (min)
8	240
12	t

Como as grandezas são inversamente proporcionais, podemos escrever

$$12t = 8 \cdot 240 \implies t = 160\text{min}.$$

2.3 Regra de Três Composta

A diferença entre a regra de três simples e a regra de três composta é que a primeira lida com duas grandezas, enquanto a segunda lida com três ou mais grandezas. Embora neste texto vamos resolver problemas envolvendo três grandezas, a abordagem para lidar com mais grandezas é a mesma.

Exemplo da regra de três composta envolvendo grandezas diretamente proporcionais

Estamos tirando água do poço na fazenda dos meus avós. Sabemos que 5 garrafas de 2 litros de água pesam 10 quilos. Quanto pesam duas garrafas de 3 litros?

As três grandezas neste problema são: garrafas, litros e quilos. Escrevemos a relação entre elas sabendo que:

Garrafas	Litros	Quilos
5	2	10
2	3	X

Agora precisamos calcular a relação entre as grandezas, sempre comparando com a grandeza em que o desconhecido é X.

Comparando garrafas com quilos: Se houver menos garrafas, elas pesarão menos. Há uma proporção direta.

Comparando litros com quilos: Se houver mais litros, eles pesarão mais. Também há uma proporção direta.

D

5 2 10

2 3 X

D

Agora escrevemos as relações na forma de fração, para poder encontrar o desconhecido X. A primeira fração inclui a variável a ser encontrada (isso não é obrigatório, mas ajuda a resolver mais tarde). Em seguida, representamos a multiplicação das duas frações como uma equação.

$$\frac{10}{X} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} \implies X = 6.$$

As garrafas pesam 6 kg.

Capítulo 3

Equação do Primeiro Grau e Função Afim

3.1 Equação do Primeiro Grau

3.1.1 Propriedades da Igualdade

1. (Reflexiva) $a = a$

2. (Simétrica) Se $a = b$, então $b = a$.

3. (Transitiva) Se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

3.1.2 Propriedades Aditiva e Multiplicativa da Igualdade

Resolvemos uma equação do primeiro grau utilizando os princípios aditivo e multiplicativo.

- Se $a = b$, então $a + c = b + c$;

- Se $a = b$, então $ac = bc$.

3.1.3 Resolvendo uma Equação do Primeiro Grau

Uma equação do primeiro grau é uma equação que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, com a e b constantes e, $a \neq 0$.

A solução da equação é $x = -\frac{b}{a}$.

De fato, utilizando as propriedades aditiva e multiplicativa, temos

$$ax + b = 0 \implies ax + \cancel{b} + \cancel{(-b)} = 0 + (-b) \implies ax = -b \implies \cancel{a}x \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = -b \cdot \frac{1}{a} \implies x = -\frac{b}{a}.$$

É importante observar que a solução acima só é válida se $a \neq 0$. Esse detalhe tem sido bastante explorado nas provas do ENA, como veremos adiante.

3.2 Definição

O que é uma função? Dados dois conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ associa a cada elemento $x \in A$ um elemento $y \in B$. Assim, dizemos que $f(x) = y$.

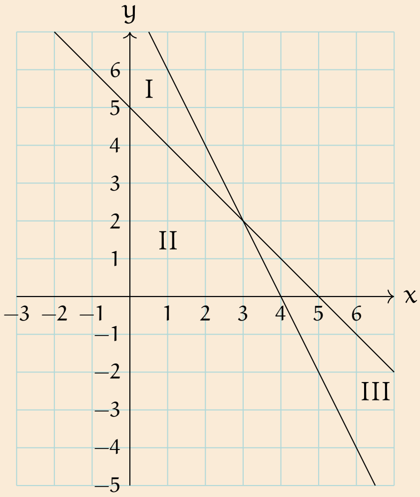
Uma função é formada por três partes: um conjunto A denominado domínio, um conjunto B chamado contradomínio, e uma regra (ou correspondência) f, que associa a cada elemento de A um único elemento $f(x)$ de B. Frequentemente dizemos "a função f" em vez de "a função $f : A \to B$".

Por exemplo, para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 17\}$, uma função é ilustrada na figura abaixo. A seta que aponta do elemento $a \in A$ para o elemento $b \in B$ indica que $f(a) = b$. Assim, $f(3) = 1$.

(3.31)

O conjunto solução do sistema de inequações

$$\begin{cases} x + y \leqslant 5 \\ 2x + y \leqslant 8 \end{cases}$$



é a região do plano identificada na figura acima pelo(s) número(s):

(A) I, apenas **(B)** II, apenas. **(C)** I e III, apenas.
(D) II e III, apenas. **(E)** I, II e III.

(3.32)

Representando por $\min(a; b)$ o menor dos números reais a e b, o conjunto solução da inequação $\min(x+3; 1-x) < 1$ é dado por:

(A) $(-2, 0)$ **(B)** $(-2, -1)$ **(C)** $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
(D) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ **(E)** $\emptyset$

(3.33)

Usaremos a notação $\max(a, b)$ para indicar o maior dos números reais a e b, isto é,

$$\max(a, b) = \begin{cases} a \text{ se } a \geqslant b \\ b \text{ se } b > a \end{cases}$$

Podemos afirmar que a solução da inequação $\max(3x + 4, 2 - x) > 7$ é o conjunto

(A) $\emptyset$ **(B)** $-5 < x < 1$ **(C)** $x > 1$
(D) $x < -5$ **(E)** $x < -5$ ou $x > 1$

(3.34)

Sobre a equação $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{x^2} = 1$, podemos afirmar:

(A) a única raiz é $x = 0$
(B) a única raiz é $x = 1$
(C) o conjunto solução é $\{0, 1\}$
(D) o conjunto solução é o intervalo $[0, 1]$
(E) o conjunto solução é $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

(3.35)

Uma distribuidora de água possui dois tanques com capacidade de 60.000 litros cada, um deles completamente vazio e o outro completamente cheio. No mesmo instante, o primeiro começa a ser enchido a uma taxa constante, de forma a estar completamente cheio em seis horas, e o segundo começa a ser esvaziado, também a uma taxa constante, de forma a estar completamente vazio em três horas. Em quanto tempo, após o começo do processo, os tanques possuirão exatamente a mesma quantidade de água?

(A) 1 h **(B)** 1 h 30 min **(C)** 2 h **(D)** 2 h 30 min **(E)** 3 h

---

(3.36)

Quando aberta, uma torneira A é capaz de encher completamente um tanque em 10 horas, mantendo vazão constante. Uma outra torneira B esvazia o tanque com uma vazão constante ainda desconhecida.
Em um certo momento, com o tanque totalmente vazio, abriu-se a torneira A. Duas horas depois, a torneira também B foi aberta. As duas torneiras permaneceram desta forma e, exatamente três horas depois, o tanque ficou de novo totalmente vazio.
Em quantas horas a torneira B conseguiria esvaziar totalmente o tanque, a partir de algum instante em que ele estivesse completamente cheio, mantendo a torneira A fechada?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

3.8 Desafios

(3.37)

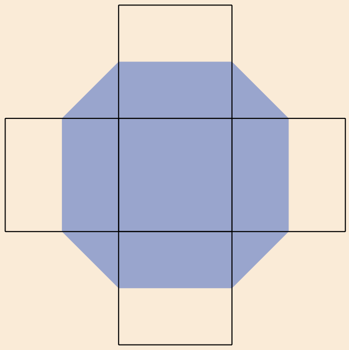
Para cada valor real de x, $f(x)$ é definido como o valor mínimo entre os três números $2x + 2$, $\frac{1}{2}x + 1$ e $-\frac{3}{4}x + 7$. Qual é o valor máximo de $f(x)$?

(A) $2/3$ **(B)** 2 **(C)** $17/5$ **(D)** $62/11$ **(E)** 7

8.4 Exercícios Resolvidos

Exemplo 8.2

Na figura, os cinco quadrados são iguais e os vértices do polígono sombreado são pontos médios dos lados dos quadrados. Se a área de cada quadrado é 1 cm^2, qual a área do polígono sombreado?

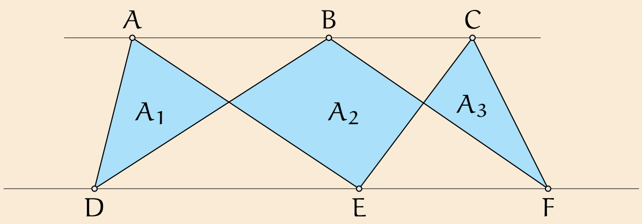


(A) 2 cm^2 **(B)** $2,5$ cm^2 **(C)** 3 cm^2 **(D)** $3,5$ cm^2 **(E)** 4 cm^2

Resolução: A região sombreada é formada pelo quadrado central, quatro retângulos cada um com metade da área de um quadrado e quatro triângulos cada um com um oitavo da área de um quadrado. Logo a área da região sombreada é $1+4\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=3,5$ cm^2

Exemplo 8.3

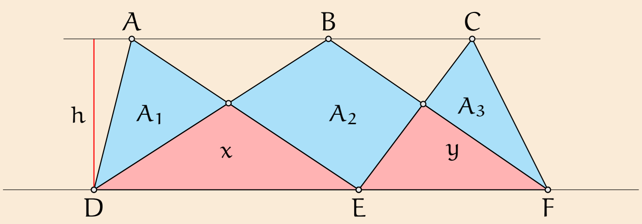
Na figura abaixo os pontos A, B, C são colineares, assim como os pontos D, E, F. As retas AB e DE são paralelas.



Sendo A_1, A_2 e A_3 as áreas das regiões destacadas na figura, podemos afirmar que:

(A) $A_2 = 2A_1 = 2A_3$
(B) $A_2 = A_1 + A_3$
(C) $A2 > A_1 + A_3$
(D) $A_2 < A_1 + A_3$
(E) $A_2^2 = A_1 \cdot A_3$

Resolução:



Observe que

$$A_{ADE} + A_{CEF} = \frac{DE \times h}{2} + \frac{EF \times h}{2} = \frac{DF \times h}{2} = A_{DBF}.$$

Portanto, $A_1 + x + A_3 + y = A_2 + x + y$, donde $A_2 = A_1 + A_3$.

(8.24)

O octógono regular $ABCDEFGH$ tem área n. Seja m a área do quadrilátero $ACEG$. Quanto é $\frac{m}{n}$?

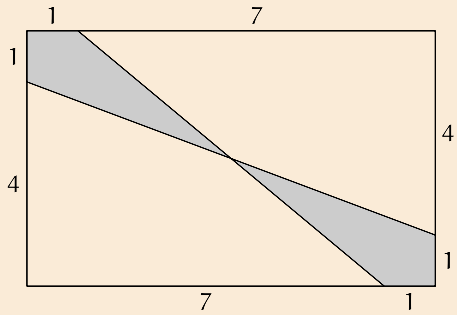
(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ **(E)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(8.25)

O quadrado $AIME$ tem lados de 10 unidades. O triângulo isósceles GEM tem base EM, e a área comum ao triângulo GEM e ao quadrado $AIME$ é 80 unidades quadradas. Encontre o comprimento da altura relativa a EM no $\triangle GEM$.

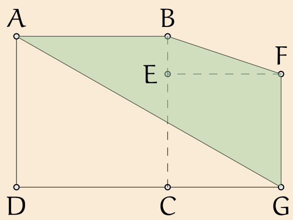
(8.26)

Encontre a área da região sombreada.



(8.27)

Na figura, $ABCD$ e $EFGC$ são quadrados de áreas R e S, respectivamente.



Qual é a área da região cinza?

(A) $\dfrac{R+S}{2}$ **(B)** $\dfrac{R-S}{2}$ **(C)** $\dfrac{RS}{2}$
(D) $\sqrt{RS}$ **(E)** $\sqrt{R^2+S^2}$

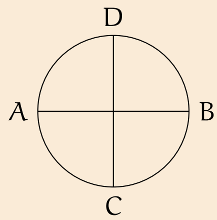
(8.28)

São dados os pontos A e B no plano, tais que a distância AB é igual a 10 unidades. Quantos pontos C existem no plano de forma que o perímetro do $\triangle ABC$ seja 50 unidades e a área de $\triangle ABC$ seja 100 unidades quadradas?

(A) 0
(B) 2
(C) 4
(D) 8
(E) infinitos

(8.29)

Uma empresa cobra por metro quadrado de forro de gesso. Quando precisa forrar uma superfície circular, o empreiteiro multiplica as medidas de dois diâmetros do círculo para estimar a área ($AB \times CD$, na figura). Essa estratégia de cálculo da área do círculo apresenta um resultado superior ao correto, fazendo com que a empresa cobre um valor a mais do que quando a área é calculada pela fórmula correta.

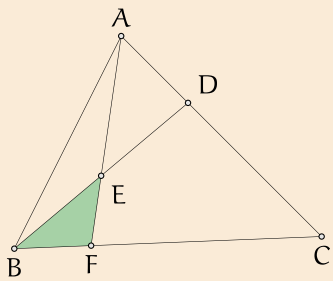


Com um custo de R$$50,00$ por metro quadrado, qual das opções melhor se aproxima do valor cobrado a mais pela empresa para forrar uma superfície circular com raio de 2 metros?

(A) R$$172,00$ **(B)** R$$160,00$ **(C)** R$$140,00$
(D) R$$125,00$ **(E)** R$$100,00$

(8.30)

Em um triângulo ABC, o ponto D divide o lado $\overline{AC}$ de tal modo que $AD : DC = 1 : 2$. Seja E o ponto médio de $\overline{BD}$ e seja F o ponto de interseção das retas BC e AE. Sabendo que a área de $\triangle ABC$ é 360 cm^2, determine a área do $\triangle EBF$ em cm^2.



(A) 24 **(B)** 30 **(C)** 32 **(D)** 36 **(E)** 40

Resolução: Existem $100/2 = 50$ números pares no conjunto considerado. Já os múltiplos de 3 são $\lfloor 100/3 \rfloor = 33$. Destes 16 são pares e 17 ímpares (observe que dois múltiplos de três consecutivos têm paridades distintas). Portanto, existem $50 - 16 = 34$ números pares não divisíveis por 3 e a probabilidade procurada é

$$\frac{34}{100} = \frac{17}{50}.$$

Exemplo 11.10

Uma caixa contém 5 fichas, numeradas de 1 a 5. As fichas são sorteadas aleatoriamente uma de cada vez e sem reposição até que a soma dos valores sorteados exceda 4. Qual é a probabilidade de que 3 sorteios sejam necessários?

(A) 1/15 (B) 1/10 (C) 1/6 (D) 1/5 (E) 1/4

Resolução: Três sorteios serão necessários nos seguintes casos relativos aos dois primeiros sorteios: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(3,1)$. A probabilidade de um desses eventos ocorrer é

$$\frac{4}{5 \times 4} = \frac{1}{5}.$$

Exemplo 11.11

Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. A probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe é:

(A) 1/2 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 12/25 (E) 13/25

Resolução: Podemos fazer uma tabela considerando todos os casos. Existem $5 \times 5 = 25$ resultados possíveis e em 13 destes a soma é par. Portanto, a probabilidade procurada é igual a $^{13}/_{25}$.

	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Segunda Solução: A probabilidade de que o resultado dê par é :

$$P_{a+b=\text{par}} = P_{a\text{ par},b\text{ par}} + P_{a\text{ ímpar},b\text{ ímpar}};$$

Sabe-se que, a probabilidade de uma pessoa escolher um número par é $P_{par} = \dfrac{2}{5}$, uma vez que existem 2 números pares, dentre os 5 possíveis.

E que a probabilidade de uma pessoa escolher um número ímpar é $P_{impar} = \dfrac{3}{5}$, uma vez que existem 3 números ímpares, dentre os 5 possíveis.

Assim, basta calcular $P_{a+b=par}$:

$$P_{a+b=\text{par}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25}.$$

Exemplo 11.12

Seis inteiros distintos são escolhidos aleatoriamente em $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Qual é a probabilidade de que, entre os selecionados, o segundo menor seja 3?

(A) $\dfrac{1}{60}$ (B) $\dfrac{1}{6}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) nda

Resolução: Existem $\binom{10}{6}$ modos de escolher 6 números distintos dentre 10 escolhas possíveis.

Capítulo 13

Provas do ENA

13.1 ENA 2022

(1) Se tomarmos x como incógnita e o número real m como um parâmetro na equação $-6 + m^2x = 3m + 4x$, é correto afirmar que:

(A) para cada valor de m, a equação possui uma única solução.
(B) a equação possui solução única se, e somente se, $m \neq -2$
(C) se a equação possui infinitas soluções, então $m = -2$
(D) se a equação não possui solução, então $m = -2$
(E) se a equação possui infinitas soluções, então $m = 2$

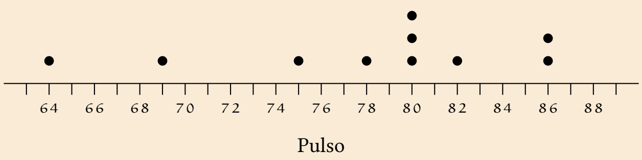
---

(2) Quantos são os gabaritos possíveis de uma prova de 30 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

(A) 150
(B) $\dfrac{30!}{25!5!}$
(C) 30^5
(D) $\dfrac{30!}{5!}$
(E) 5^{30}

---

(3) Uma pessoa mediu dez vezes seus batimentos cardíacos através do seu pulso e obteve os resultados apresentados em batimentos por minuto (bpm) no seguinte diagrama de pontos:



Sobre os dados obtidos por ela é correto afirmar que:

(A) A média é igual a 77 bpm.
(B) A moda é igual à mediana.
(C) A mediana é igual à média.
(D) A mediana é menor que a média

(E) A moda, a média e a mediana são iguais.

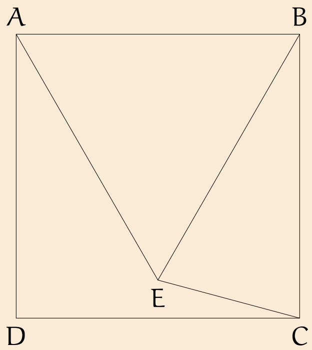
---

(4) A quantidade de números naturais divisíveis por 5 e com 5 algarismos, no sistema decimal, é igual a

(A) 20000
(B) 18000
(C) 13122
(D) 10080
(E) 6048

---

(5) Na figura abaixo, temos um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero ABE.



Indicando por α o ângulo ECD, podemos afirmar que tg α é igual a

(A) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$
(B) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$
(C) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
(D) $2+\sqrt{3}$
(E) $2-\sqrt{3}$

---

(6) Uma moeda é lançada 10 vezes. A probabilidade de obter exatamente 4 caras é igual a

(A) $\dfrac{1}{1024}$
(B) $\dfrac{4}{1024}$
(C) $\dfrac{6}{1024}$
(D) $\dfrac{105}{1024}$
(E) $\dfrac{210}{1024}$
